

# Logique et Mécanique Quantique : ceci explique cela ?

Marc Bagnol et Anne-Sophie de Suzzoni

*Octobre 2009*

- 1 Introduction à la logique linéaire
  - Une logique de ressources
  - Aux origines de LL : les espaces cohérents
- 2 Mécanique quantique
- 3 Le modèle des ECQ
- 4 Changer d'adjonction
- 5 Conclusion

# Logique : de la vérité à la dynamique des preuves

(en une seule diapositive)

- Au cours du XX<sup>ème</sup> siècle, le centre d'intérêt en logique a profondément changé : d'une "science de la vérité" on est passé à l'étude de la dynamique des preuves.

# Logique : de la vérité à la dynamique des preuves

(en une seule diapositive)

- Au cours du XX<sup>ème</sup> siècle, le centre d'intérêt en logique a profondément changé : d'une "science de la vérité" on est passé à l'étude de la dynamique des preuves.
- Les travaux de Gentzen (déduction naturelle, calcul des séquents) ont permis de se rendre compte du contenu calculatoire des preuves.

# Logique : de la vérité à la dynamique des preuves

(en une seule diapositive)

- Au cours du XX<sup>ème</sup> siècle, le centre d'intérêt en logique a profondément changé : d'une "science de la vérité" on est passé à l'étude de la dynamique des preuves.
- Les travaux de Gentzen (déduction naturelle, calcul des séquents) ont permis de se rendre compte du contenu calculatoire des preuves.
- La logique linéaire est issue d'une étude de la logique d'un point de vue dynamique. On peut parler de logique d'*actions* et de *ressources*.

# L'implication linéaire : $\multimap$

- Du point de vue des preuves : l'implication linéaire interdit la réutilisation d'hypothèses.

On a  $A \multimap B$  si on peut démontrer  $B$  en utilisant  
***une seule fois***  $A$ .

# L'implication linéaire : $\multimap$

- Du point de vue des preuves : l'implication linéaire interdit la réutilisation d'hypothèses.

On a  $A \multimap B$  si on peut démontrer  $B$  en utilisant  
***une seule fois***  $A$ .

- L'implication devient un *processus de transformation*.

# L'implication linéaire : $\multimap$

- Du point de vue des preuves : l'implication linéaire interdit la réutilisation d'hypothèses.

On a  $A \multimap B$  si on peut démontrer  $B$  en utilisant  
***une seule fois***  $A$ .

- L'implication devient un *processus de transformation*.
- Métaphore économique :  $A \multimap B$  peut se lire « payer  $A$  pour obtenir  $B$  ».

# La négation : $\sim$

- En logique linéaire, la négation prend un sens plus opérationnel que « *ne pas* [ $\cdot$ ] »

# La négation : $\sim$

- En logique linéaire, la négation prend un sens plus opérationnel que « *ne pas* [ $\cdot$ ] »
- $\sim A \simeq$  les tests/questions sur  $A$   
*Analogie à l'espace dual en algèbre linéaire.*

# La négation : $\sim$

- En logique linéaire, la négation prend un sens plus opérationnel que « *ne pas* [ $\cdot$ ] »
- $\sim A \simeq$  les tests/questions sur  $A$   
*Analogue à l'espace dual en algèbre linéaire.*
- La négation linéaire est involutive :  $A = \sim\sim A$ . *Les tests sur les tests sur  $A$ , ce sont les  $A$  eux-mêmes.*  
*En algèbre linéaire : espaces réflexifs.*

# Le tenseur : $\otimes$

- Le “et” de la logique linéaire. Très différent du “et” classique.

# Le tenseur : $\otimes$

- Le “et” de la logique linéaire. Très différent du “et” classique.
- $A \otimes B$  se lit « *j'ai A et B **simultanément*** ».

# Le tenseur : $\otimes$

- Le “et” de la logique linéaire. Très différent du “et” classique.
- $A \otimes B$  se lit « *j'ai A et B **simultanément*** ».
- En particulier,  $A \otimes A$  veut dire « *deux fois A* ».  
On a  $A \otimes A \neq A$ ,

# Le tenseur : $\otimes$

- Le “et” de la logique linéaire. Très différent du “et” classique.
- $A \otimes B$  se lit « *j'ai A et B **simultanément*** ».
- En particulier,  $A \otimes A$  veut dire « *deux fois A* ».  
On a  $A \otimes A \neq A$ ,  
alors que “A et A”  $\simeq$  “A” du point de vue de la *vérité*.

Le par :  $\wp$ 

- Connecteur dual du  $\otimes$  :

$$A \wp B = \sim(\sim A \otimes \sim B) \quad \text{et} \quad A \multimap B = \sim A \wp B$$

- Le “ou” de la logique linéaire.
- $A \wp B$  peut se voir comme un “mélange” de  $A$  et  $B$ .

# L'exponentielle : !

Le retour à la normale

- Une modalité qui redonne un comportement classique aux formules.

# L'exponentielle : !

Le retour à la normale

- Une modalité qui redonne un comportement classique aux formules.
- ! $A$  signifie «  $A$  autant de fois que l'on veut ».

# L'exponentielle : !

Le retour à la normale

- Une modalité qui redonne un comportement classique aux formules.
- $!A$  signifie « *A autant de fois que l'on veut* ».
- Formule fondamentale de LL :

$$A \Rightarrow B \simeq !A \multimap B$$

# Les espaces cohérents

- Au départ : un modèle de la logique intuitionniste.

# Les espaces cohérents

- Au départ : un modèle de la logique intuitionniste.
- Idée : à chaque formule  $A$  on associe un ensemble  $[A]$ , à chaque démonstration  $\pi$  de  $A \multimap B$  un morphisme  $[\pi] : [A] \rightarrow [B]$ .

# Les espaces cohérents

- Au départ : un modèle de la logique intuitionniste.
- Idée : à chaque formule  $A$  on associe un ensemble  $[A]$ , à chaque démonstration  $\pi$  de  $A \multimap B$  un morphisme  $[\pi] : [A] \rightarrow [B]$ .
- En étudiant les espaces cohérents, la trame linéaire sous jacente à LI apparait plus clairement.

# Les espaces cohérents

- Au départ : un modèle de la logique intuitionniste.
- Idée : à chaque formule  $A$  on associe un ensemble  $[A]$ , à chaque démonstration  $\pi$  de  $A \multimap B$  un morphisme  $[\pi] : [A] \rightarrow [B]$ .
- En étudiant les espaces cohérents, la trame linéaire sous jacente à LI apparait plus clairement.
- Pour mieux comprendre l'opérationnalité d'une logique, on en cherche des modèles.

# Un modèle “quantique” de LL ?

- On a dit que la logique linéaire était une logique d'*actions* et de *ressources*. On cherche à aller plus loin : comprendre LL comme une logique d'*actions quantiques* sur des *ressources quantiques*.

# Un modèle “quantique” de LL ?

- On a dit que la logique linéaire était une logique d'*actions* et de *ressources*. On cherche à aller plus loin : comprendre LL comme une logique d'*actions quantiques* sur des *ressources quantiques*.
- Principe de non-clonage et non-duplication d'hypothèses.

# Un modèle “quantique” de LL ?

- On a dit que la logique linéaire était une logique d'*actions* et de *ressources*. On cherche à aller plus loin : comprendre LL comme une logique d'*actions* **quantiques** sur des *ressources* **quantiques**.
- Principe de non-clonage et non-duplication d'hypothèses.
- On va pour cela utiliser le langage de l'information quantique.

# Principe de non-clonage

## Proposition

Il n'existe pas de transformation quantique permettant de dupliquer des états.

Une transformation quantique “consomme” l'état de départ.

Parallèlement, une transformation de  $A \rightarrow B$  “consomme” la preuve de  $A$  pour en faire une preuve de  $B$ .

- 1 Introduction à la logique linéaire
- 2 Mécanique quantique
  - Les opérateurs de densité
  - Applications superpositives
- 3 Le modèle des ECQ
- 4 Changer d'adjonction
- 5 Conclusion

# Les opérateurs de densité

## Definition

Soit  $H_0$  un espace de Hilbert et  $\rho \in \mathcal{L}(H_0)$ . L'opérateur  $\rho$  est un opérateur de densité si :

- $\rho$  est positif
- $\text{Tr}(\rho) = 1$

*Remarque : en information quantique, on considère souvent des opérateurs de trace inférieure à 1. Leur trace est une donnée supplémentaire indiquant la probabilité d'apparition de l'état.*

# Mesure, Produit tensoriel

- Pourquoi des opérateurs positifs ?

# Mesure, Produit tensoriel

- Pourquoi des opérateurs positifs ?
- Mesurer un état revient à le projeter dans un certain espace et la probabilité pour que la mesure rende une certaine valeur est  $\text{Tr}(P\rho) \in [0, 1]$ .

# Mesure, Produit tensoriel

- Pourquoi des opérateurs positifs ?
- Mesurer un état revient à le projeter dans un certain espace et la probabilité pour que la mesure rende une certaine valeur est  $Tr(P\rho) \in [0, 1]$ .
- Pour coupler deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$ , on utilise le produit tensoriel.

# Applications superpositives

## Definition

Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert et  $A$  une application linéaire de  $\mathcal{L}(H_1)$  dans  $\mathcal{L}(H_2)$ .

$A$  est dite superpositive si pour tout espace de Hilbert  $H_0$ , l'application

$$Id_{\mathcal{L}(H_0)} \otimes A : \mathcal{L}(H_0 \otimes H_1) \rightarrow \mathcal{L}(H_0 \otimes H_2)$$

préserve les opérateurs positifs, *i.e.* :

Pour tout  $\rho \in \mathcal{L}(H_0 \otimes H_1)$  positif,  $(Id_{\mathcal{L}(H_0)} \otimes A)(\rho)$  est positif.

# Linéarité et mécanique quantique

- Les objets de la mécanique quantique sont des opérateurs,

# Linéarité et mécanique quantique

- Les objets de la mécanique quantique sont des opérateurs,
- ses transformations aussi.

# Linéarité et mécanique quantique

- Les objets de la mécanique quantique sont des opérateurs,
- ses transformations aussi.
- En logique linéaire, une preuve de  $A \multimap B$  est non seulement une preuve mais aussi une transformation entre les preuves de  $A$  et les preuves de  $B$ .

- 1 Introduction à la logique linéaire
- 2 Mécanique quantique
- 3 Le modèle des ECQ**
  - Polarité
  - Les connecteurs
  - Limites des espaces cohérents quantiques
- 4 Changer d'adjonction
- 5 Conclusion

- Inspiré des espaces cohérents classiques, transposés dans le monde quantique.

- Inspiré des espaces cohérents classiques, transposés dans le monde quantique.
- On s'intéresse à des ensembles d'hermitiens sur un espace de Hilbert.
- On associe aux formules de tels ensembles d'hermitiens.

- Inspiré des espaces cohérents classiques, transposés dans le monde quantique.
- On s'intéresse à des ensembles d'hermitiens sur un espace de Hilbert.
- On associe aux formules de tels ensembles d'hermitiens.

### Definition

On dit que deux hermitiens  $g$  et  $h$  sont *polaires*, noté  $f \perp g$ , si

$$\text{Tr}(fg) \in [0, 1]$$

Polaire de  $X$ ,  $\sim X := \{ y \mid y \perp X \}$

- Inspiré des espaces cohérents classiques, transposés dans le monde quantique.
- On s'intéresse à des ensembles d'hermitiens sur un espace de Hilbert.
- On associe aux formules de tels ensembles d'hermitiens.

### Definition

On dit que deux hermitiens  $g$  et  $h$  sont *polaires*, noté  $f \perp g$ , si

$$\text{Tr}(fg) \in [0, 1]$$

Polaire de  $X$ ,  $\sim X := \{ y \mid y \perp X \}$

La polarité sert à interpréter la négation linéaire :

$$[\sim X] := \sim[X]$$

Étant donné  $X$  un ensemble d'hermitiens, on notera  $|X|$  l'espace de Hilbert sur lequel ces hermitiens sont définis.

On appellera  $|X|$  le **support** (ou encore la **trame**) de  $X$ .

Étant donné  $X$  un ensemble d'hermitiens, on notera  $|X|$  l'espace de Hilbert sur lequel ces hermitiens sont définis.

On appellera  $|X|$  le **support** (ou encore la **trame**) de  $X$ .

*Remarque : la définition de la polarité et de  $\sim X$  dit implicitement que  $|\sim X| = |X|$*

Étant donné  $X$  un ensemble d'hermitiens, on notera  $|X|$  l'espace de Hilbert sur lequel ces hermitiens sont définis.

On appellera  $|X|$  le **support** (ou encore la **trame**) de  $X$ .

*Remarque : la définition de la polarité et de  $\sim X$  dit implicitement que  $|\sim X| = |X|$*

### Definition

On appelle *espace cohérent quantique* (ECQ) un ensemble d'hermitiens en égal à son bipolaire.

*i.e.*, tel que  $X = \sim\sim X$

# Logique et géométrie

Le **théorème du Bipolaire** permet de faire le lien entre la logique ( $\sim\sim X = X$ ) et la géométrie des espaces mathématiques utilisés.

## Théorème

$X \subseteq \mathcal{H}(|X|)$  est un ECQ si et seulement si :

- 1  $X$  est non-vide.
- 2  $X$  est convexe et fermé.
- 3 Si  $\mathbb{N}.x \subseteq X$ , alors  $-x \in X$ .
- 4 Si  $x, y \in X$ ,  $\lambda, \mu \geq 0$  et  $\lambda x + \mu y \in X$  alors  $\lambda x \in X$ .

# L'adjonction des ECQ

Dans les ECQ, on utilise un isomorphisme, noté  $\theta$ , entre  $\mathcal{L}(H_1) \rightarrow \mathcal{L}(H_2)$  et  $\mathcal{L}(H_1 \otimes H_2)$ . Il est défini de la façon suivante :

## Definition

Si  $F \in \mathcal{L}(H_1) \rightarrow \mathcal{L}(H_2)$  on définit  $\theta_F$  comme l'unique opérateur sur  $H_1 \otimes H_2$  tel que :

$$\text{Pour tous } x, y : \text{Tr}(F(x).y) = \text{Tr}(\theta_F.x \otimes y)$$

# Connecteurs #1

On peut maintenant définir quelques connecteurs.

L'adjonction  $\theta$  nous permet de définir  $A \multimap B$  :

## Definition

Si  $A \subseteq \mathcal{H}(|A|)$  et  $B \subseteq \mathcal{H}(|B|)$  sont des ECQ, on définit  $A \multimap B$  inclus dans  $\mathcal{H}(|A| \otimes |B|)$  par :

$$A \multimap B := \{ \theta_F \mid F \in A \multimap B \}$$

# Connecteurs #1

On peut maintenant définir quelques connecteurs.

L'adjonction  $\theta$  nous permet de définir  $A \multimap B$  :

## Definition

Si  $A \subseteq \mathcal{H}(|A|)$  et  $B \subseteq \mathcal{H}(|B|)$  sont des ECQ, on définit  $A \multimap B$  inclus dans  $\mathcal{H}(|A| \otimes |B|)$  par :

$$A \multimap B := \{ \theta_F \mid F \in A \multimap B \}$$

On en déduit une définition de  $A \wp B := \sim A \multimap B \dots$

# Connecteurs #1

On peut maintenant définir quelques connecteurs.

L'adjonction  $\theta$  nous permet de définir  $A \multimap B$  :

## Definition

Si  $A \subseteq \mathcal{H}(|A|)$  et  $B \subseteq \mathcal{H}(|B|)$  sont des ECQ, on définit  $A \multimap B$  inclus dans  $\mathcal{H}(|A| \otimes |B|)$  par :

$$A \multimap B := \{ \theta_F \mid F \in A \rightarrow B \}$$

On en déduit une définition de  $A \wp B := \sim A \multimap B$  ...

... et de  $A \otimes B := \sim(\sim A \wp \sim B)$

# Connecteurs #2

*On note*

$$P_H := \{h \in \mathcal{H}^+(H) \mid \text{Tr}(h) \leq 1\} = \sim\sim \{ \text{Opérateurs densité sur } H \}$$

# Connecteurs #2

*On note*

$$P_H := \{ h \in \mathcal{H}^+(H) \mid \text{Tr}(h) \leq 1 \} = \sim\sim \{ \text{Opérateurs densité sur } H \}$$

Deux propriétés intéressantes de  $\otimes$  et  $\wp$  :

- $P_{H_1} \otimes P_{H_2} = \text{Sep}_{H_1 \otimes H_2}$

# Connecteurs #2

On note

$$P_H := \{h \in \mathcal{H}^+(H) \mid \text{Tr}(h) \leq 1\} = \sim\sim \{ \text{Opérateurs densité sur } H \}$$

Deux propriétés intéressantes de  $\otimes$  et  $\wp$  :

- $P_{H_1} \otimes P_{H_2} = \text{Sep}_{H_1 \otimes H_2}$

- $P_{H_1 \otimes H_2} \subsetneq P_{H_1} \wp P_{H_2}$

La différence vient du fait que  $P_{H_1} \wp P_{H_2}$  contient des opérateurs non positifs.

## Rôle particulier de l'identité

- L'identité de  $\mathcal{L}(H_0)$  transforme naturellement les preuves d'une formule  $A$  de support  $H_0$  en des preuves de  $A$ . (Elles restent les mêmes)

# Rôle particulier de l'identité

- L'identité de  $\mathcal{L}(H_0)$  transforme naturellement les preuves d'une formule  $A$  de support  $H_0$  en des preuves de  $A$ . (Elles restent les mêmes)
- On a donc  $\theta_{Id} \in A \multimap A$ .

# Rôle particulier de l'identité

- L'identité de  $\mathcal{L}(H_0)$  transforme naturellement les preuves d'une formule  $A$  de support  $H_0$  en des preuves de  $A$ . (Elles restent les mêmes)
- On a donc  $\theta_{Id} \in A \multimap A$ .
- D'une façon plus générale, l'identité doit être un morphisme des modèles de logique linéaire.

# Positivité

Le modèle des ECQ présente des difficultés par rapport à la positivité :

- Les objets ne sont pas tous positifs.

# Positivité

Le modèle des ECQ présente des difficultés par rapport à la positivité :

- Les objets ne sont pas tous positifs.
- les morphismes ne sont pas tous superpositifs.

# Positivité

Le modèle des ECQ présente des difficultés par rapport à la positivité :

- Les objets ne sont pas tous positifs.
- les morphismes ne sont pas tous superpositifs.
- l'absence de notion de trace en dimension infinie rend impossible la généralisation du modèle.

## Première solution envisagée

- On constate que quand la dimension  $N$  tend vers  $\infty$ , les valeurs propres négatives de  $\theta_{Id}$  tendent vers zéro.

## Première solution envisagée

- On constate que quand la dimension  $N$  tend vers  $\infty$ , les valeurs propres négatives de  $\theta_{Id}$  tendent vers zéro.
- On envisage par conséquent de prendre la limite semi-classique  $N \rightarrow \infty$ .  
(on a en effet une notion de **trace semi-finie** sur les opérateurs positifs)

# Première solution envisagée

- On constate que quand la dimension  $N$  tend vers  $\infty$ , les valeurs propres négatives de  $\theta_{Id}$  tendent vers zéro.
- On envisage par conséquent de prendre la limite semi-classique  $N \rightarrow \infty$ .  
(on a en effet une notion de trace **trace semi-finie** sur les opérateurs positifs)
- **Cela ne résoud pas le problème** : si  $P$  est un projecteur orthogonal de dimension 2 et  $F : \rho \mapsto P\rho P$ , alors  $\theta_F$  admet  $-\frac{1}{2}$  comme valeur propre, indépendamment de la dimension.

## Deuxième solution : changer l'adjonction

- **Constat** : les exemples naturels d'ECQ sont formés d'opérateurs positifs et d'une condition de norme. Mais quand on couple ces espaces, on obtient des opérateurs non positifs.

## Deuxième solution : changer l'adjonction

- **Constat** : les exemples naturels d'ECQ sont formés d'opérateurs positifs et d'une condition de norme. Mais quand on couple ces espaces, on obtient des opérateurs non positifs.
- **Idée** : Modifier  $\theta$  de façon à ce que le couplage conserve la positivité des opérateurs, en particulier  $\theta_{Id}$  doit être positif.

## Deuxième solution : changer l'adjonction

- **Constat** : les exemples naturels d'ECQ sont formés d'opérateurs positifs et d'une condition de norme. Mais quand on couple ces espaces, on obtient des opérateurs non positifs.
- **Idée** : Modifier  $\theta$  de façon à ce que le couplage conserve la positivité des opérateurs, en particulier  $\theta_{Id}$  doit être positif.
- Parallèlement, on voudrait s'assurer que le  $\bowtie$  n'introduise pas d'opérateur non positifs quand on couple deux ECQ formés d'objets positifs, comme  $P_{H_1} \bowtie P_{H_2}$ .

- 1 Introduction à la logique linéaire
- 2 Mécanique quantique
- 3 Le modèle des ECQ
- 4 Changer d'adjonction**
  - L'isomorphisme de Selinger
  - Reconstruction du modèle
- 5 Conclusion

- Un article de P. Selinger « *Towards a Quantum Programming Language* »
- L'auteur utilise une adjonction entre des espaces de matrices :

$$\chi : \mathbf{M}_m(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbf{M}_{mn}(\mathbb{C})$$

- Un article de P. Selinger « *Towards a Quantum Programming Language* »
- L'auteur utilise une adjonction entre des espaces de matrices :

$$\chi : \mathbf{M}_m(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbf{M}_{mn}(\mathbb{C})$$

### Théorème

$\chi_F$  est positive *si et seulement si*  $F$  est superpositive.

- Un article de P. Selinger « *Towards a Quantum Programming Language* »
- L'auteur utilise une adjonction entre des espaces de matrices :

$$\chi : \mathbf{M}_m(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbf{M}_{mn}(\mathbb{C})$$

### Théorème

$\chi_F$  est positive *si et seulement si*  $F$  est superpositive.

Seul problème :  $\chi$  est un isomorphisme sur les **matrices**. Pour avoir un isomorphisme sur les opérateurs, on doit passer par le choix d'une base.

# La solution

- Une courte remarque dans l'article de P. Selinger :  
« *On peut avoir  $\chi$  une version de  $\chi$  indépendante de la base à condition de le considérer comme un isomorphisme entre  $\mathcal{L}(H_1) \rightarrow \mathcal{L}(H_2)$  et  $\mathcal{L}(H_1^* \otimes H_2)$  » (et pas  $\mathcal{L}(H_1 \otimes H_2)$ )*

# La solution

- Une courte remarque dans l'article de P. Selinger :  
« *On peut avoir  $\chi$  une version de  $\chi$  indépendante de la base à condition de le considérer comme un isomorphisme entre  $\mathcal{L}(H_1) \rightarrow \mathcal{L}(H_2)$  et  $\mathcal{L}(H_1^* \otimes H_2)$  » (et pas  $\mathcal{L}(H_1 \otimes H_2)$ )*
- On s'inspire de cette remarque pour construire des "ECQ positifs".

# La solution

- Une courte remarque dans l'article de P. Selinger :  
 « On peut avoir  $\chi$  une version de  $\chi$  indépendante de la base à condition de le considérer comme un isomorphisme entre  $\mathcal{L}(H_1) \rightarrow \mathcal{L}(H_2)$  et  $\mathcal{L}(H_1^* \otimes H_2)$  » (et pas  $\mathcal{L}(H_1 \otimes H_2)$ )
- On s'inspire de cette remarque pour construire des "ECQ positifs".
- $\chi : A \rightarrow^+ B \simeq A \rightarrow B = \sim A \wp B$   
 (de support  $|A|^* \otimes |B|$ , mais on a également  
 $|\sim A \wp B| = |\sim A| \otimes |B|$ )  
 suggère de poser :  $|\sim A| := |A|^*$

# Faire communiquer $\mathcal{H}(E)$ et $\mathcal{H}(E^*)$

On utilise l'isomorphisme suivant, qu'on appellera la *transposition* :

## Definition

Si  $H_1$  est un espace de Hilbert de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(H_1)$ , on définit la *transposée* de  $f$ , notée  ${}^t f$  par :

$$\text{Pour tout } \varphi \in H_1^*, \quad {}^t f(\varphi) := \varphi \circ f$$

# Faire communiquer $\mathcal{H}(E)$ et $\mathcal{H}(E^*)$

On utilise l'isomorphisme suivant, qu'on appellera la *transposition* :

## Definition

Si  $H_1$  est un espace de Hilbert de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(H_1)$ , on définit la *transposée* de  $f$ , notée  ${}^t f$  par :

$$\text{Pour tout } \varphi \in H_1^*, \quad {}^t f(\varphi) := \varphi \circ f$$

La transposition a toutes les propriétés dont on a besoin : préservation de la positivité, de la norme, de la trace, etc.

# Une nouvelle polarité

## Definition

Soit  $H_0$  un espace de Hilbert. On dit que  $x$  est polaire à  $y$  et on note  $x \sim^+ y$  si et seulement si :

- $x \in \mathcal{H}^+(H_0)$ ,
- $y \in \mathcal{H}^+(H_0^*)$ ,
- $\text{Tr}({}^t xy) \in [0, 1]$ .

*Remarque : en identifiant  $H_0$  à son bidual, on obtient que cette relation est symétrique.*

# Théorème du bipolaire

## Théorème

Soit  $H_0$  un espace de Hilbert et  $X$  un ensemble d'opérateurs positifs de  $H_0$ . On a  $X = \sim^+ \sim^+ X$  si et seulement si :

- (i)  $0 \in X$ ,
- (ii)  $X$  est un convexe fermé,
- (iii) si  $x \in X$  et  $y \leq x$  alors  $y \in X$ .

*Remarque : l'égalité est à prendre au sens où l'on identifie  $H_0$  et son bidual à travers l'isomorphisme  $v \in H_0 \mapsto (\phi \mapsto \phi(v)) \in (H_0^*)^*$ .*

# Implication linéaire

## Definition

On définit l'espace cohérent correspondant à l'implication  $X \multimap Y$  comme l'ensemble des  $\chi_F$  tels que  $F$  soit une application superpositive vérifiant  $F(X) \subseteq Y$ , c'est-à-dire :

$$X \multimap^+ Y = \{\chi_F \mid F : X \rightarrow Y\}.$$

# Implication linéaire

## Definition

On définit l'espace cohérent correspondant à l'implication  $X \multimap Y$  comme l'ensemble des  $\chi_F$  tels que  $F$  soit une application superpositive vérifiant  $F(X) \subseteq Y$ , c'est-à-dire :

$$X \multimap^+ Y = \{\chi_F \mid F : X \rightarrow Y\}.$$

Les applications  $F$  ne conservent pas nécessairement la trace des opérateurs, permettant ainsi d'inclure dans le modèle les différentes mesures que l'on peut effectuer sur les systèmes.

# Propriétés des multiplicatifs

## Proposition

Avec cette définition,  $X \otimes^+ Y = \sim^+ \sim^+ \{x \otimes y \mid x \in X \text{ et } y \in Y\}$ , ce espace cohérent positif est bien défini car si  $x$  et  $y$  sont des opérateurs positifs, alors  $x \otimes y$  est lui-même positif.

N'oublions pas que :

$$X \wp^+ Y = (\sim^+ X) \rightarrow^+ Y = \sim^+ ((\sim^+ X) \otimes^+ (\sim^+ Y))$$

## Proposition

Si  $P_{H_1}$  (resp.  $P_{H_2}$ ) désigne le canonique positif de trame  $H_1$  (resp.  $H_2$ )  
i.e.  $P_{H_1} = \{\rho \geq 0 \mid \text{Tr}(\rho) \leq 1\}$  alors

$$P_{H_1} \otimes P_{H_2} = P_{H_1 \otimes H_2}$$

### Proposition

Si  $P_{H_1}$  (resp.  $P_{H_2}$ ) désigne le canonique positif de trame  $H_1$  (resp.  $H_2$ )  
i.e.  $P_{H_1} = \{\rho \geq 0 \mid \text{Tr}(\rho) \leq 1\}$  alors

$$P_{H_1} \wp + P_{H_2} = P_{H_1 \otimes H_2}$$

On a donc construit un  $\wp$  quantique qui réalise le couplage de deux systèmes.

- 1 Introduction à la logique linéaire
- 2 Mécanique quantique
- 3 Le modèle des ECQ
- 4 Changer d'adjonction
- 5 Conclusion**

# Passage en dimension infinie

Si  $x$  et  $y$  sont des opérateurs positifs de  $\mathcal{L}(H)$ , on peut définir une notion de trace semifinie du produit  $xy$  par :

$$\text{Tr}(xy) = \sup_P \{ \text{Tr}(PxPy) \}$$

(le sup est pris sur l'ensemble des projecteurs de dimension finie de  $H$ )

Remarquons que pour tous projecteurs  $P$  et  $P'$ , si  $P \leq P'$ , alors  $\text{Tr}(PxPy) \leq \text{Tr}(P'xP'y)$ .

# Espaces de Fock

Interpréter la notion de ressources *ad libitum*

- En physique, on appelle espace de Fock, l'espace engendré par des opérateurs dits de création et d'annihilation,

$$a_k^\dagger \text{ et } a_k$$

# Espaces de Fock

Interpréter la notion de ressources *ad libitum*

- En physique, on appelle espace de Fock, l'espace engendré par des opérateurs dits de création et d'annihilation,

$$a_k^\dagger \text{ et } a_k$$

- Autrement dit, un état de base  $\rho$  se met sous la forme  $\prod a_{k_j}^\dagger |0\rangle\langle 0| \prod a_{k_j}$ .

# Espaces de Fock

Interpréter la notion de ressources *ad libitum*

- En physique, on appelle espace de Fock, l'espace engendré par des opérateurs dits de création et d'annihilation,

$$a_k^\dagger \text{ et } a_k$$

- Autrement dit, un état de base  $\rho$  se met sous la forme  $\prod a_{k_j}^\dagger |0\rangle\langle 0| \prod a_{k_j}$ .
- Les  $a_k^\dagger$  commutent entre eux, ainsi que les  $a_k$  ce qui fait de ces espaces des espaces symétrisés.

# Espaces de Fock

Interpréter la notion de ressources *ad libitum*

- En physique, on appelle espace de Fock, l'espace engendré par des opérateurs dits de création et d'annihilation,

$$a_k^\dagger \text{ et } a_k$$

- Autrement dit, un état de base  $\rho$  se met sous la forme  $\prod a_{k_j}^\dagger |0\rangle\langle 0| \prod a_{k_j}$ .
- Les  $a_k^\dagger$  commutent entre eux, ainsi que les  $a_k$  ce qui fait de ces espaces des espaces symétrisés.
- L'espace de Fock correspond à l'algèbre symétrique d'un espace de Hilbert.

# Espaces de Fock

Interpréter la notion de ressources *ad libitum*

- En physique, on appelle espace de Fock, l'espace engendré par des opérateurs dits de création et d'annihilation,

$$a_k^\dagger \text{ et } a_k$$

- Autrement dit, un état de base  $\rho$  se met sous la forme

$$\prod a_{k_j}^\dagger |0\rangle\langle 0| \prod a_{k_j}.$$

- Les  $a_k^\dagger$  commutent entre eux, ainsi que les  $a_k$  ce qui fait de ces espaces des espaces symétrisés.
- L'espace de Fock correspond à l'algèbre symétrique d'un espace de Hilbert.
- On envisage de construire un ECQ<sup>+</sup> !X de trame :  $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (H_0^{\otimes n})$ .

## Conséquences en logique

- Exploiter les particularités des  $ECQ^{(+)}$  pour mieux comprendre LL.

# Conséquences en logique

- Exploiter les particularités des ECQ<sup>(+)</sup> pour mieux comprendre LL.
- La  $\eta$ -expansion dans les ECQ :  
Idée : le “recollement” de deux identités  $\simeq$  identité ?  
Dans un modèle ensembliste :  $Id_A \times Id_B = Id_{A \times B}$

# Conséquences en logique

- Exploiter les particularités des ECQ<sup>(+)</sup> pour mieux comprendre LL.

- La  $\eta$ -expansion dans les ECQ :

Idée : le “recollement” de deux identités  $\simeq$  identité ?

Dans un modèle ensembliste :  $Id_A \times Id_B = Id_{A \times B}$

Dans le monde quantique :  $Id_{\mathcal{L}(H_1 \oplus H_2)}$  est bien l'identité de  $\mathcal{L}(H_1 \oplus H_2)$ . Mais le recollement de deux identités,  $Id_{\mathcal{L}(H_1)} \oplus Id_{\mathcal{L}(H_2)}$  agit de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$