Rapport de stage de deuxième année du MPRI

Damien Noguès sous la supervision de Michel Habib

1er juillet 2009

Table des matières

1 Introduction

2 La δ-l'hyperbolicitée

2.1 Définitions

Tout au long de ce rapport, sauf mention contraire, les graphes que nous considérerons sont des graphes finis, non orientés, non pondérés, sans boucles $G = (V, E)$. On notera de plus $V(G)$ les sommets de G et $E(G)$ ses arrêtes.

Un chemin d'un graphe est une suite de sommets tels que pour chaque sommet du chemin, il existe une arrête entre lui est son successeur. Un cycle est un chemin fini tel que les extrémités soient égales. Un cycle est dit simple si chaque sommet apparaît au plus une fois dans ce cycle (sauf évidement l'extrémité qui apparaît exactement deux fois.) On appellera pont d'un cycle un chemin qui relie deux points du cycle de longueur inférieure à celle des deux chemins de ce cycle qui relient ces points. On utilisera de plus le terme corde pour les ponts de longueur 1 (de taille 2).

La distance de u à v deux sommets de G c'est à dire le nombre d'arêtes d'un chemin de u à v de taille minimale, sera notée uv. On notera de plus $ecc(u) = max_v uv$, l'excentricité de u.

Le rayon du graphe, défini comme l'eccentricitée minimale sur les sommet sera noté $R(G) = min_u ecc(u)$. Le diamètre sera lui noté $D(G) = max_u ecc(u)$.

Considérons maintenant les espaces métriques. Les graphes munis de la distance usuelle définie précédemment sont des exemples d'espaces métriques. Intéressons nous maintenant à une classe particulière d'espace métrique, les espaces géodésique. Un espace métrique est dit géodésique si il est possible de joindre chaque paire de point par une géodésique : un chemin continu pour lequel la longueur est respectée. Plus formellement, une géodésique de $a \in E$ à $b \in E$ est une application continue $c : [0; 1] \rightarrow E$ vérifiant $c(0) = a$, $c(1) = b$ et pour tout $0 \leq x \leq y \leq 1$, $d(a, b).(y - x) = d(c(x), c(y))$.

Les espaces métriques δ-hyperboliques ont été introduits par M.Gromov [] initialement pour l'étude des groupes. Un espace métrique géodésique est dit δ-hyperboliques si pour chaque ensemble de quatre points $x, y, u, v \in E$, la déférence entre les deux plus grande des trois somme : $xy + uv$, $xu + yv$ et $xv + yu$ est inférieure à 2δ. On notera ainsi $\delta(x, y, u, v)$ cette différence. Et si E est δ-hyperbolique pour une certaine valeur de δ on dira que E est hyperbolique. De plus si E est hyperbolique, $\delta(E)$ sera la plus petite valeur de δ telle que E soit δ-hyperboliques sera appelé hyperbolicitée de E. Cette notion a de plus récemment été appliquée en informatique et notamment en théorie des graphes.

Pour appliquer l'hyperbolicitée aux graphes qui ne sont pas des espaces géodésique il est nécessaire de considérer une transformation. Chaque arrête de G est remplacée par un segment de longueur 1. Un tel espace géodésique associé au graphe G sera noté $\mathbb{G}$.

Ainsi on obtient bien un espace géodésique, dans lequel la théorie de Gromov peut être exploitée.

Cependant, un graphes fini est nécessairement hyperbolique (on a $\delta(G) \leq D(G)$). On s'intéresse donc souvent à l'hyperbolicitée d'un graphe, la question de savoir si le graphe est hyperbolique n'étant intéressante que dans le cas des graphes infinis.

Mais différentes valeurs sont utilisée pour l'hyperbolicitée. Tout d'abord l'hyperbolicitée au sens des espaces géodésique $\delta(\mathbb{G})$, mais il est également souvent intéressant de ne considérer que les sommets lors du calcul de l'hyperbolicitée. Cette valeur sera par abus quand à elle notée $\delta(G)$.

Nous verrons dans la section 3 que ces deux valeurs sont en fait très proches (elles diffèrent d'au plus 1).

2.2 État de l'art

3 Hyperbolicitée et cycles

3.1 Hyperbolicitée des sommets contre hyperbolicitée de l'espace géodésique

3.2 hyperbolicitée et plus grand cycle sans corde

4 Asteroidal Triples

Dans cette section nous allons nous intéresser à une classe précise de graphes : les graphes sans *Asteroidal-Triples*. Tout d'abord la définition d'astéroidal triple.

Définition 4.1 *Soit G un graphe, on dit que (u, v, w) est un* Asteroidal-Triple *si entre chaque paire de sommets il existe un chemin qui évite le voisinage du troisième sommet.*

Un graphe sera donc sans asteroidal-triple (AT-free) si aucun triplet de sommets de ce graphe n'est un asteroidal-triple.

Les graphes AT-free jouent un rôle important en théorie des graphes. En effet, un grand nombre de classes de graphes usuelles sont AT-free. Les graphes d'intervalles, les graphes de permutations et les graphes de co-comparbilité sont des exemples de telles classes.

Les graphes AT-free ont de plus la propriété intéressante d'avoir leur hyperbolicitée bornée, qui plus est par une petite valeur. En effet,

Théorème 4.1 *Soit G un graphe sans* Asteroidal-Triples *(AT-free), alors l'hyperbolicitée de G vérifie :*

$$2\delta(G) \leq 2$$

.

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe sans AT. Soit $(x, y, u, v) \in V^4$ tels que $2\delta(G) = xy + uv - xu - yv$ (avec $xy + uv \geq xu + yv \geq xv + yu$). Il suit $2\delta(G) \leq xy + uv - xv - yu$, ce fait nous servira pour la démonstration.

En particulier, (x, y, u) n'est pas un Asteroidal-Triples. Ainsi quatre possibilités :

(i) Tout chemin de x à y passe par un voisinage de u

(ii) Tout chemin de x à u passe par un voisinage de y

(iii) Tout chemin de u à y passe par un voisinage de x

Notons que le cas ou (x, y, u) n'est pas libre rentre dans ces cas.

(i) : Considérons le chemin P constitué d'une géodésique $g_{(x,v)}$ de x à v et d'une autre $g_{(v,y)}$ de v à y bout à bout. soit u' un projeté de u sur P ($uu' \leq 1$ par la définition d'AT-free). Si $u' \in g_{(x,v)}$ on a :

$$\begin{aligned} xy + uv - xv - yu &= xy + uv - xu' - u'v - yu \\ &\leq xy + uu' + u'v - xu' - u'v - yu \\ &\leq xy + uu' - xu' - yu' + uu' \\ &\leq 2uu' \end{aligned} \tag{1}$$

Il suit $2\delta(G) \leq 2$.

Si $u' \in g_{(v,y)}$, un calcul identique en inversant x et y nous donne le même résultat.

(ii) : Dans ce cas considérons pour P une géodésique reliant x à u. Soit y' un projeté de y sur P.

$$\begin{aligned} xy + uv - xu - yv &= xy + uv - xy' - y'u - yv \\ &\leq xy' + y'y + uv - xy' - y'u - yv \\ &\leq y'y + uv - y'u - y'v + yy' \\ &\leq 2yy' \end{aligned} \tag{2}$$

D'où $2\delta(G) \leq 2$.

(iii) : Ce cas est similaire au précédent (en utilisant $2\delta(G) \leq xy + uv - xv - yu$).

$\square$

Remarque 1 *Si l'on remplace voisinage par boule de rayon k dans la définition des AT, on peut en quelque sorte définir des* k-Asteroidal-Triples. *Dans ce cas les équations (1) et (2) nous affirme que :*

Soit G un graphe sans k-Asteroidal-Triples *(k-AT-free), alors l'hyperbolicitée de G vérifie :*

$$2\delta(G) \leq 2k$$

.

Remarque 2 *Cependant pour tout k, il existe des arbres (hyperbolicité* 0*) possédant un* k-Asteroidal-Triple. *Par exemple le graphe de la figure (a faire).*

Il est de plus possible de caractériser les graphes qui réalisent cette borne. Étudions donc maintenant les graphes AT-free d'hyperbolicitée 2 et montrons que ces graphes possèdent un cycle induit de longueur 4 ou 5. Tout d'abord, les cycles induits de longueur supérieure sont impossible, en effet un cycle de longueur 6 ou plus possède un AT (il suffit de prendre 3 sommets indépendant).

Les graphes tels que $2\delta = 1$ ont été décris dans []. Ce sont les graphes dont les cycles sont "bien pontés" (*well-bridged*), qui ne contiennent pas certains graphes en tant que sous graphe isométrique (figure). Or chacun ce ces graphe possède des astreroidal-triple.

Ainsi un graphe AT-free est d'hyperbolicitée $2\delta = 2$ si et seulement si il n'est pas well-bridged. Or si un graphe est chordal, il est évidement well-bridged. Ainsi il possède au moins un cycle induit de longueur supérieure à 4 et inférieure à 5. Mais un cycle induit de longueur 4 ou 5 est aussi un sous graphe isométrique.

Nous avons ainsi démontrer la propriété suivante :

Proposition 4.2 *Un graphe AT-free vérifie $2\delta = 2$ si et seulement si il admet C_4 ou C_5 comme sous graphe induit (ou isométrique).*

Remarque 3 *Dans [],les auteurs ont caractérisé les graphes d'intervalle comme étant les graphes AT-free et chordaux. Il suit :*
Corollaire *Un graphe d'intervalle vérifie $2\delta \leq 1$.*

5 Calcul de l'hyperbolicitée

5.1 calcul exact

5.2 calcul approché

Principe de l'algorithme : Soient $(x, y, u, v) \in V^4$ tels que $2\delta(G) = xy + uv - xu - yv$ (avec $xy + uv \geq xu + yv \geq xv + yu$)

Tout d'abord remarquons que l'on peut supposer de plus : $xv + yu \geq xu + yv - 1$. En effet, sinon prenons u' un voisin de u tel que $xu' = xu - 1$ on obtient :

$$\begin{aligned}
xy + uv - xu - yv &\leq xy + u'v + uu' - xu - yv \\
&\leq xy + u'v + 1 - xu - yv \\
&\leq xy + u'v - xu' - yv
\end{aligned}$$

De plus si $xv + yu \leq xu + yv - 2$ on a bien $xu' + yv \geq xv + yu'$. Donc en itérant ce procédé l'on obtient un quadruplet de réalisateurs de l'hyperbolicitée satisfaisant la contrainte supplémentaire.

Considérons maintenant une géodésique g reliant x à y. Soit a le point de g tel que $xa - ya = xu - yu$

Remarque 4 *a n'est pas forcement un sommet. Son existence est garantie par le fait que $|xu - yu| \leq xy$, et la fonction de g dans $\mathbb{R}$ qui à a associe $xa - ya$ est surjective sur $[-xy; xy]$*

Maintenant si l'on fait la somme de $xy + ua - xu - ya$ et de $xy + av - xa - yv$, comme $xa + ya = xy$ on obtient $xy + ua + av - xu - yv \geq xy + uv - xu - yv = 2\delta$.

Il suit qu'au moins une de ces deux valeurs est supérieure à δ. Ainsi si on considère pour chaque paire de sommets, une géodésique les reliant puis

$$max_{u \in V} xy + ua - xu - ya$$

on obtiendra une valeur supérieure à δ.

De plus comme $xa - ya = xu - yu \geq xv - yv$, on obtient : $xu + ya = xa + yu$ et $xa + yv \geq xv + ya$. Ainsi ces deux valeurs sont inférieures à $2\delta + 1$. (le $+1$ venant du fait que a peut appartenir à une arrête au lieu d'être un sommet).

Le fonctionnement de l'algorithme est donc le suivant :

(i) Tout d'abord on effectue un parcourt en largeur (BFS) à partir de chaque sommet. On enregistre les distances calculées ainsi que les "parents" de chaque sommet dans le parcourt. (Complexité $O(mn)$)

(ii) Pour chaque paire de sommets (x, y) on calcul une géodésique les reliant à l'aide des "parents". (Complexité $O(xy) = O(n)$)
Puis on calcul le
$$max_{u \in V} xy + ua - xu - ya$$
(Complexité $O(n)$)

Ainsi la complexité totale de l'algorithme est $O(mn + n^2(n)) = O(n^3)$

6 Graphes pondérés