Séance du 22 décembre 2006 : Limites, trigonométrie

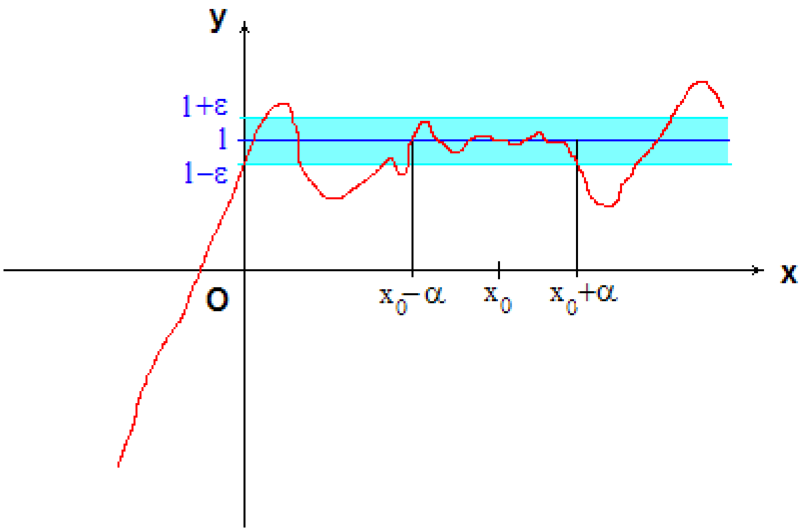
Compte rendu et compléments

I/ Limites et Continuité

Soit une fonction f définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$

On dit que <u>f a une limite l en</u> $x_0 \in D_f$ si lorsque x se rapproche de x_0 , f(x) se rapproche autant qu'on veut de l :

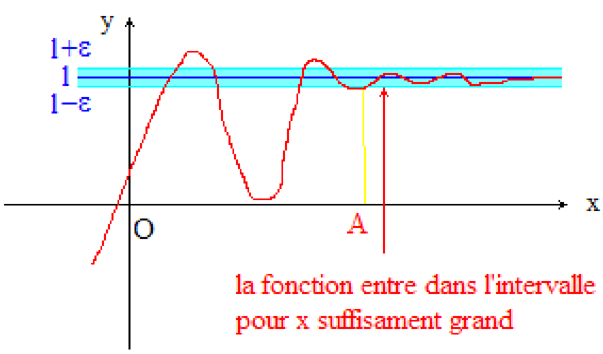
> Quel que soit ε, si on veut que f(x) soit compris entre l–ε et l+ε (intervalle de longueur 2ε), il suffit que x se trouve dans un intervalle autour de x_0 : $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$



<u>Limite en</u> $\pm\infty$: On dit que f tend vers l quand x tend vers $\pm\infty$ si quel que soit l'intervalle que l'on se fixe autour de l, les images f(x) de f s'y trouveront pour x assez grand. Et il en est ainsi <u>aussi petit soit l'intervalle</u> (si seulement <u>certains</u> intervalles le permettent, alors la fonction est juste bornée).

$$\forall \epsilon>0, \exists A \in \mathbb{R}, \textit{tel que } \forall x>A, l-\epsilon<f(x)<l+\epsilon$$

$\forall \epsilon$ *: quel que soit* ϵ
$\exists A$ *: il existe* A *(on peut trouver* A *tel que...)*



Il ne peut pas y avoir deux limites différentes en un point x_0.

Soient deux fonctions f et g, f qui tend vers l et g qui tend vers l' quand x tend vers x_0 (éventuellement $\pm\infty$) : $f(x)_{x\to x_0}\to l$

$g(x)_{x\to x_0}\to l'$

- $\lambda f(x)_{x\to x_0}\to\lambda l$
- $f(x)+g(x)_{x\to x_0}\to l+l'$
- $f(x)g(x)_{x\to x_0}\to l\times l'$
- si $l'\neq 0$ alors $\frac{1}{g(x)}\to\frac{1}{l'}$ et $\frac{f(x)}{g(x)}\to\frac{l}{l'}$

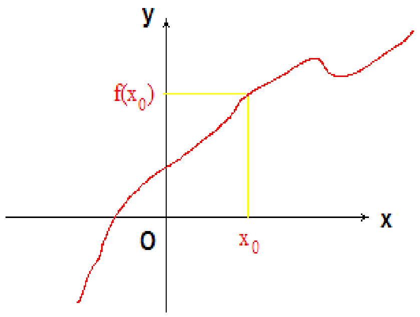
<u>Théorème d'encadrement :</u>

Soient f, g et h trois fonctions telles que $\forall x, f(x)\leq g(x)\leq h(x)$

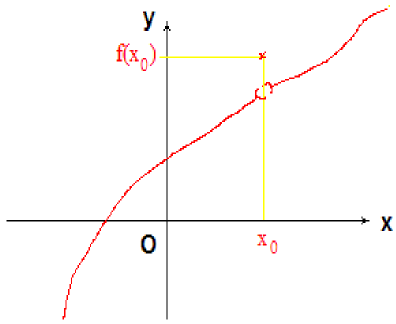
Si $f(x)_{x\to x_0}\to l$ et $h(x)_{x\to x_0}\to l$

Alors $g(x)_{x\to x_0}\to l$ aussi

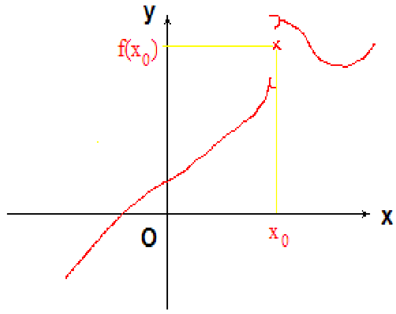
Si f a une limite en $x_0\in D_f$ avec $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ on dit que f est continue en x_0.



Continue



Discontinue

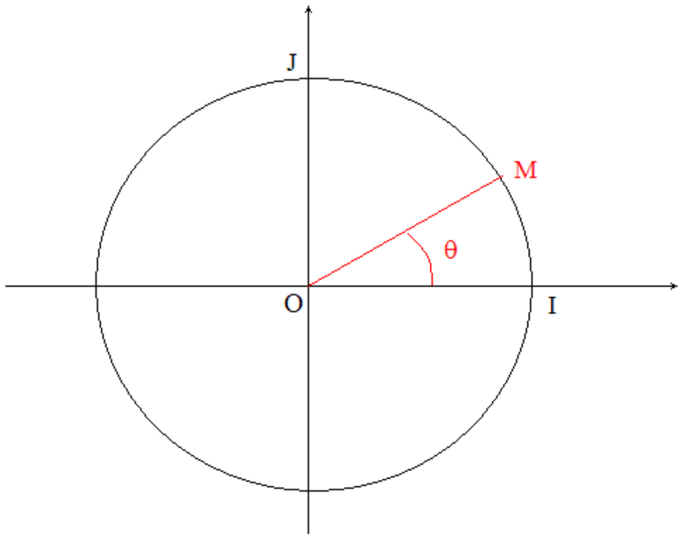


Discontinue

II / Trigonométrie

Le cercle trigonométrique

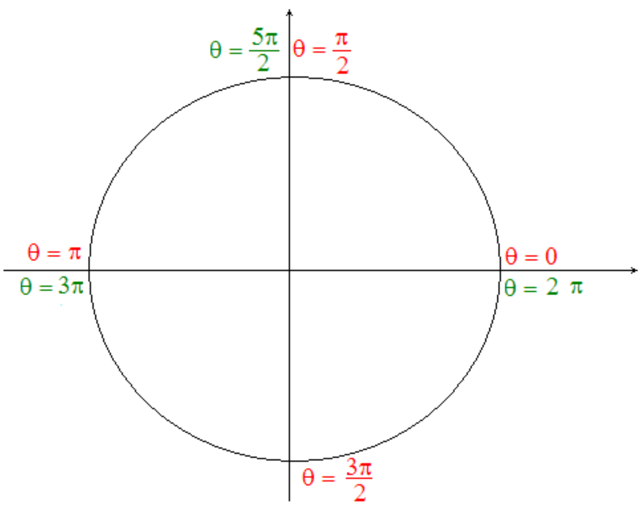
Cercle trigonométrique : cercle de rayon 1 autour de l'origine O.



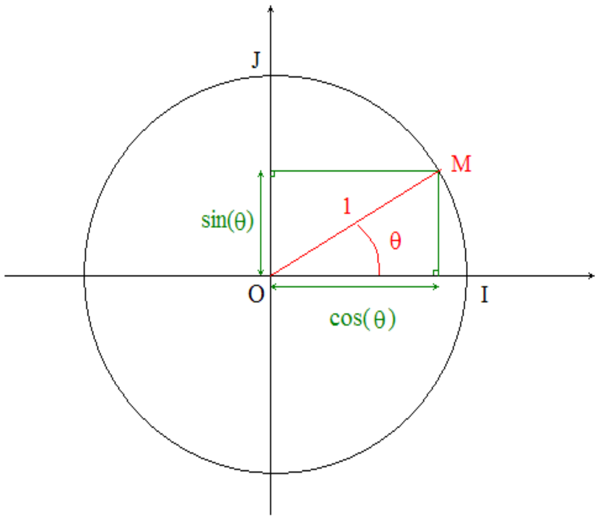
On mesure la position du point M par la longueur de l'arc de cercle entre I et M : La valeur de l'angle θ qui repère le point M en radians est égale à la longueur de l'arc de cercle entre I et M.

Un tour complet (360°) fait donc 2π rad. (le périmètre est égal à 2π, comme le rayon est 1)
Un demi tour (180°) fait π rad.
Un quart de tour (90°) fait π/2 rad.

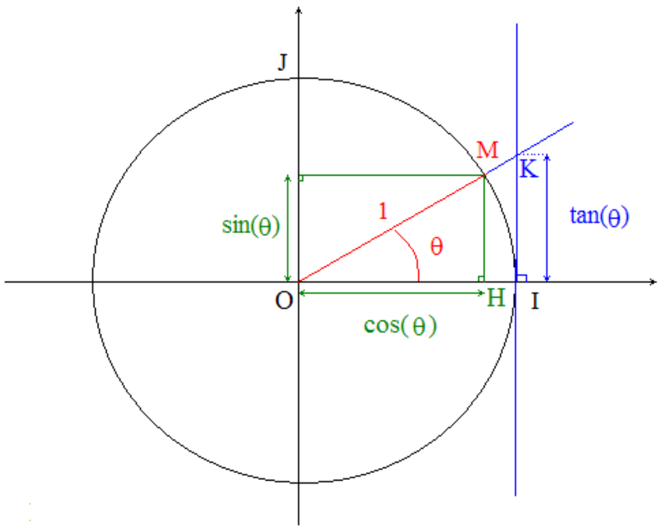
On peut faire plusieurs tours : ainsi lorsqu'on revient en I après avoir fait un tour, on a parcouru 2π rad., et lorsqu'on arrive après ce tour en J, on a parcouru $2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{2} rad$ et ainsi de suite...



L'abcisse des points du cercle trigonométrique correspond au cosinus de l'angle qui les repère.
L'ordonnée des points du cercle trigonométrique correspond au sinus de l'angle qui les repère.



La distance entre I et le point d'intersection de la droite (OM) et de la tangente au cercle trigonométrique en I est appelée la tangente de l'angle.



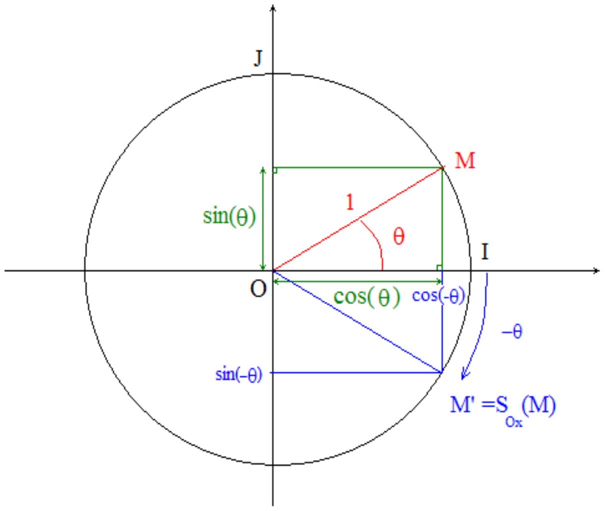
Avec Thalès on a : $\dfrac{HM}{IK}=\dfrac{OH}{OI}$

$\dfrac{\sin\theta}{IK}=\dfrac{\cos\theta}{1}$ d'où $IK=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

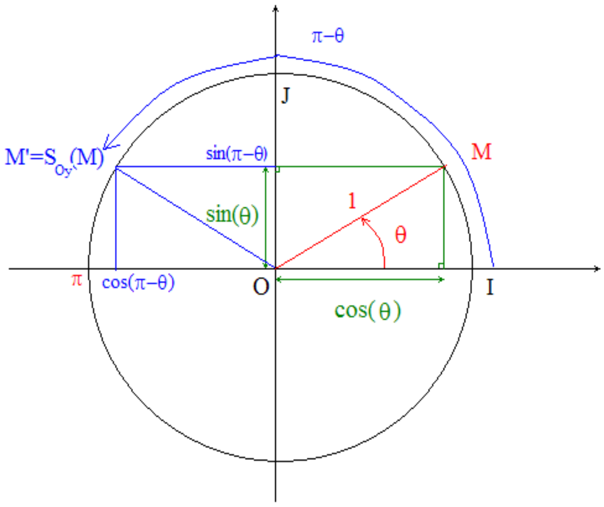
D'ailleurs, on peut remarquer que quel que soit q, le triangle OHM est rectangle, on peut y appliquer le théorème de Pythagore, ce qui nous donne : $\forall\theta,\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

Quelques propriétés de symétrie

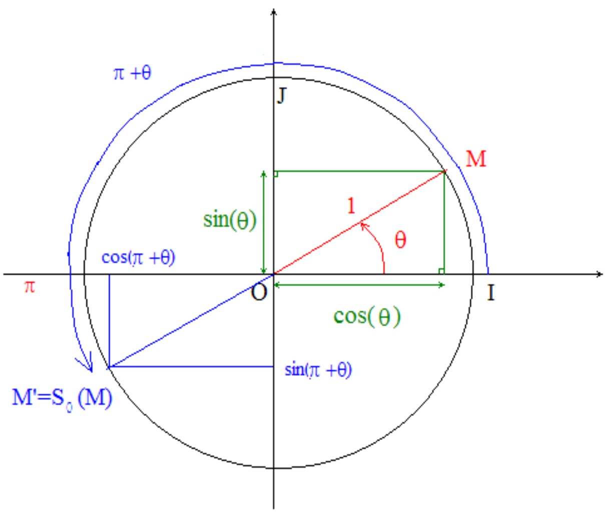
$$\begin{cases} \cos(-\theta)=\cos(\theta) \\ \sin(-\theta)=-\sin(\theta) \end{cases}$$



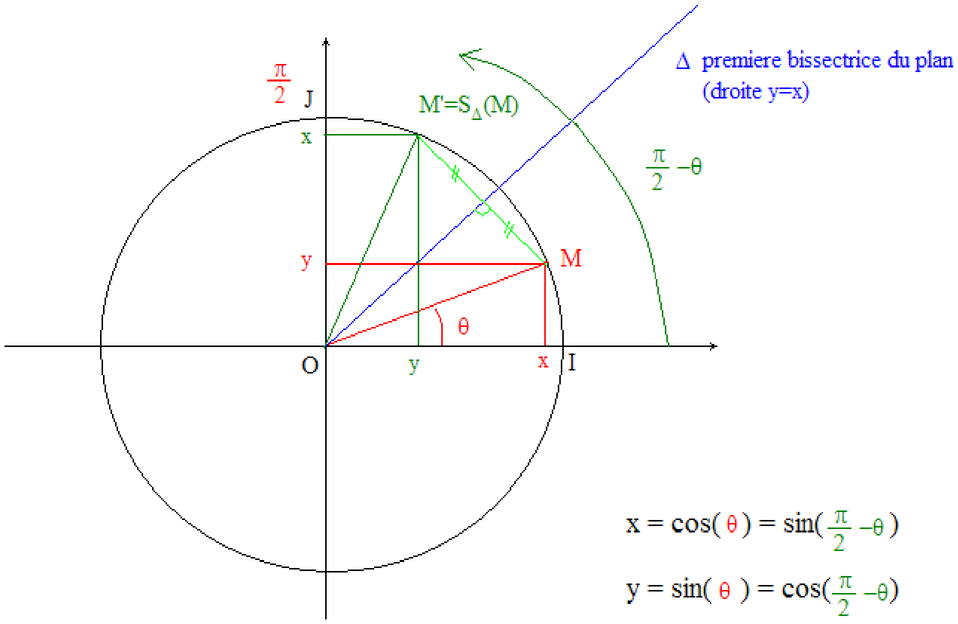
$$\begin{cases} \cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta) \\ \sin(\pi-\theta)=\sin(\theta) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos(\pi+\theta)=-\cos(\theta) \\ \sin(\pi+\theta)=-\sin(\theta) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta) \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(\theta) \end{cases}$$

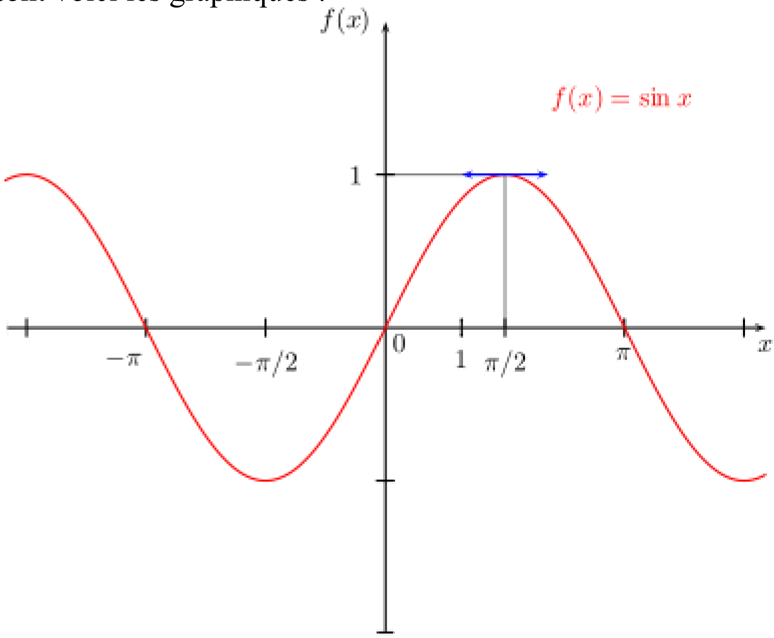


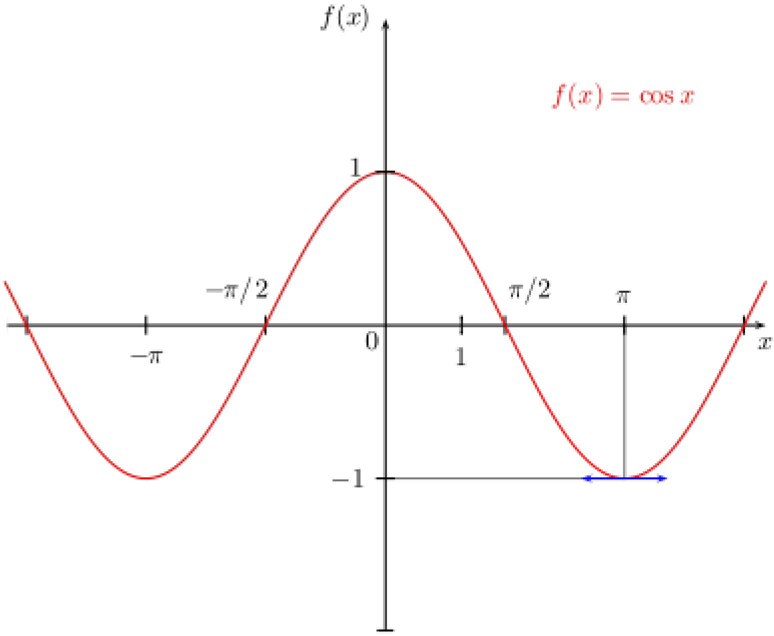
➢ Les fonctions sinus et cosinus

Comme lorsqu'on effectue un tour du cercle trigonométrique (correspondant au parcours d'une distance 2π), on revient au point géométrique de départ (même si l'on a parcouru une distance 2π entre temps et donc que l'angle qui décrit le nouveau point n'est plus θ mais θ + 2π), les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.

De plus, comme $\begin{cases} \cos(-\theta)=\cos(\theta) \\ \sin(-\theta)=-\sin(\theta) \end{cases}$, la fonction cosinus est paire, la fonction sinus impaire.

En considérant différents points particuliers du cercle trigonométrique, on a certaines valeurs de ces deux fonctions, dont voici les graphiques :

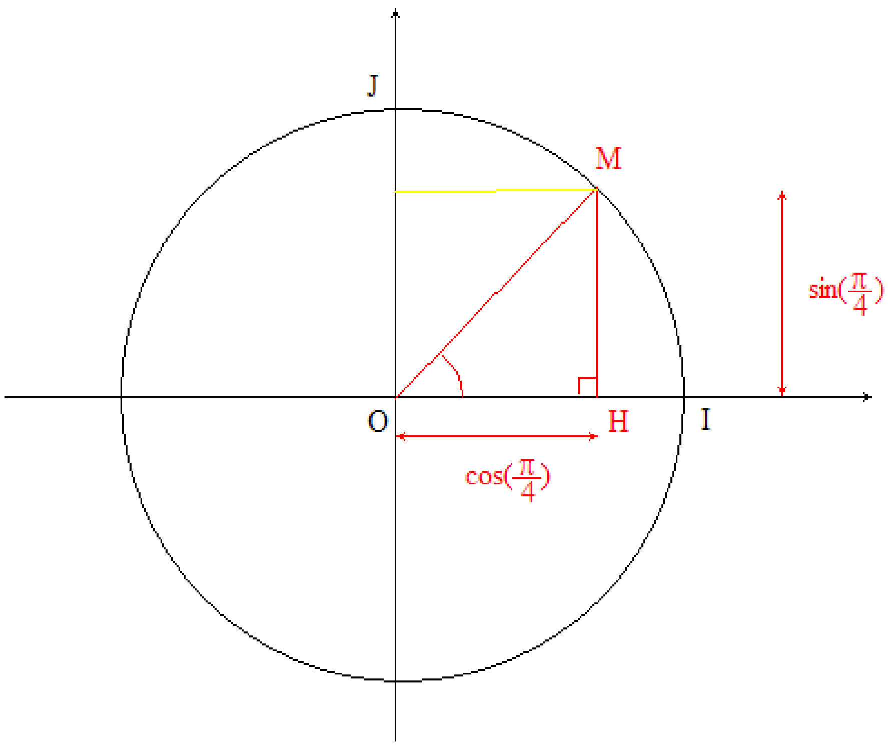




On peut remarquer que ce sont les mêmes fonctions décalées de $\frac{\pi}{2}$.

Calcul de certaines valeurs particulières

➔ $\cos(\frac{\pi}{4})$ et $\sin(\frac{\pi}{4})$



D'après $\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin(\theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos(\theta) \end{cases}$, on a $\cos(\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{4})$

.

On utilise ensuite le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OHM :

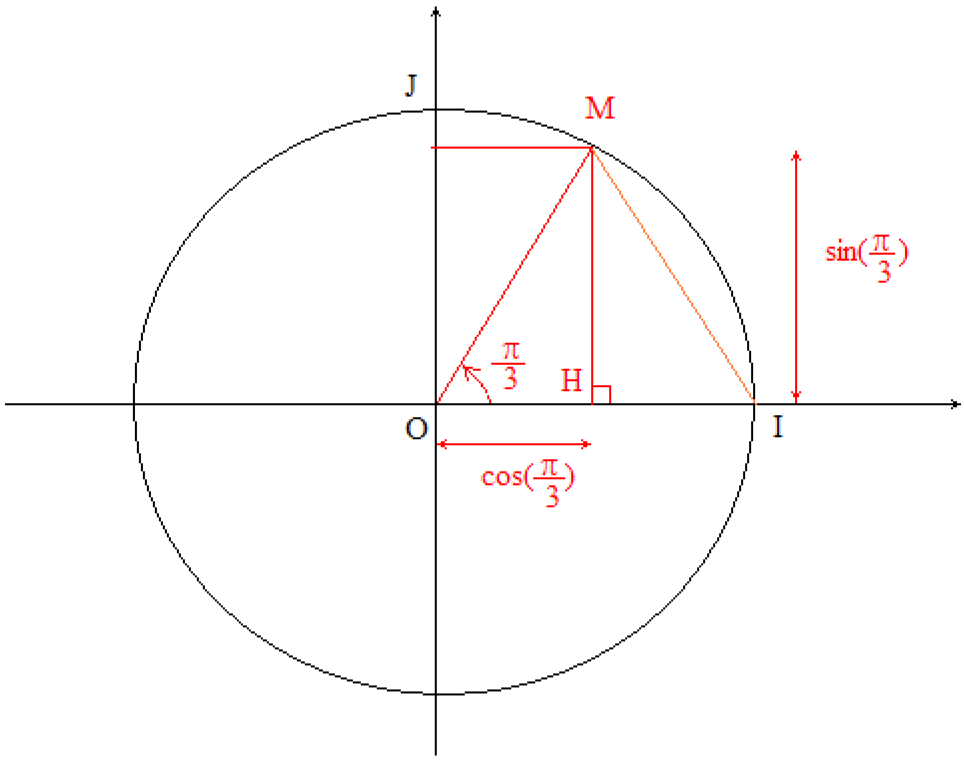
$\cos^2(\frac{\pi}{4})+\sin^2(\frac{\pi}{4})=1$

$2\cos^2(\frac{\pi}{4})=1$

$\cos^2(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$

d'où $\cos(\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (car on a $\cos(\frac{\pi}{4})\geqslant 0$)

➔ $\cos(\frac{\pi}{3})$ et $\sin(\frac{\pi}{3})$



Comme les cotés OI et OM du triangle OIM sont égaux à 1, le triangle OIM est isocèle. Comme de plus l'angle MOI vaut $\frac{\pi}{3}$, le triangle OIM est équilatéral (tous ses angles valent $\frac{\pi}{3}$).

On a donc $OH=\frac{1}{2}$ (la hauteur est la médiatrice et la médiane dans un triangle équilatéral)

d'où $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

On applique ensuite le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OHM :

$$(\frac{1}{2})^2+\sin^2(\frac{\pi}{3})=1^2=1$$

$$\frac{1}{4}+\sin^2(\frac{\pi}{3})=1$$

$$\sin^2(\frac{\pi}{3})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$\sin(\frac{\pi}{3})=+\sqrt{\frac{3}{4}}$ (car on a $\sin(\frac{\pi}{3})\geqslant 0$)

et $\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

➔ $\cos(\frac{\pi}{6})$ et $\sin(\frac{\pi}{6})$

Comme on a $\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin(\theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos(\theta) \end{cases}$, on a $\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{3}) \end{cases}$ en prenant $\theta=\frac{\pi}{3}$

On a donc sans calcul :

$\cos(\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$

Résumé des différentes valeurs trouvées :