TD 42

Le but de ce TD est d'examiner plus en détails les moyens de mettre les éléments d'un tableau dans l'ordre, et en particulier d'évaluer l'efficacité du tri par bulles, ainsi que celle d'une autre méthode, appelée tri rapide, ou *quick sort.*

Les calculs de probabilités dans ce TD sont faits « à la louche ». Une étude plus rigoureuse est possible, mais bien plus compliquée. Le but de ce TD est d'avoir une idée des ordres de grandeur.

1 Coût du tri par bulles

1. On considère la liste des mois du calendrier républicain, donnée dans cet ordre : « ventôse brumaire floréal frimaire fructidor germinal messidor nivôse pluviôse prairial thermidor vendémiaire » ; appliquer à la main le tri par bulles sur cette liste, et noter toutes les comparaisons et tous les échanges faits.

2. Recommencer l'exercice précédent avec la liste dans l'ordre suivant : « floréal frimaire fructidor germinal messidor nivôse pluviôse prairial thermidor vendémiaire ventôse brumaire ». Que remarquez-vous ?

3. Pour un élément partant de la position i et devant arriver à la position j, donnez un nombre minimum d'étapes nécessaires très simple. En supposant que j est aléatoire et indépendant de i, donnez (approximativement) l'espérance de ce minimum. Donnez la moyenne de cette espérance sur tous les i. Dites combien il faut de comparaisons au total si au total k étapes de tri sont nécessaires.

2 Le tri rapide

Le principe du tri rapide, ou *quick sort* est de choisir un élément appelé pivot parmi le tableau à trier, de séparer en deux paquets ceux qui sont plus petits et ceux qui sont plus grands que le pivot, et enfin de trier séparément les deux paquets.

4. Montrer comment on peut réaliser le partage des éléments directement dans le tableau, avec simplement des échanges d'éléments deux à deux. Écrivez le programme du tri, en vous concentrant sur l'essentiel (laissez les déclarations de variables pour le TP par exemple).

5. Partez de la liste des mois par ordre chronologique : « vendémiaire brumaire frimaire nivôse pluviôse ventôse germinal floréal prairial messidor thermidor fructidor », et appliquer le tri rapide en choisissant le pivot au hasard. Comptez les comparaisons et les échanges que vous faites. Gardez trace également de la liste des sous-tableaux qu'il vous reste à traiter. Attention : vous ne devez enlever un sous-tableau de cette liste que quand vous avez fini de trier ses deux parties, et vous devez inclure dans cette liste même les parties vides qui peuvent apparaître.

6. Recommencer l'exercice précédent en partant des mois déjà triés, et en prenant comme pivot à chaque fois le premier élément du tableau à trier. Quelle est la taille maximale de la liste des sous-tableaux à trier ?

7. Une programmation astucieuse permet de considérer qu'on en a fini avec un bout du tableau dès qu'on commence à traiter ses morceaux. Dans ces conditions, vaut-il mieux commencer par le plus petit ou le plus gros des morceaux ? Si vous êtes courageux, prouvez qu'il est possible de trier un tableau à 2^k éléments sans jamais avoir une liste de sous-tableaux à traiter plus longue que k.

8. Si le pivot est tiré au hasard, estimez la taille moyenne du plus gros et du plus petit des deux morceaux. Déduisez-en combien de subdivisions successives seront nécessaires.

TP 43

Pour ne pas avoir à resaisir à chaque fois un échantillon pour faire des essais, on peut travailler avec un tableau fixé une fois pour toutes. On peut par exemple écrire :

```
String mois[] = { "vendémiaire", "brumaire", "frimaire", "nivôse",
  "pluviôse", "ventôse", "germinal", "floréal", "prairial", "messidor",
  "thermidor", "fructidor" };
```

1. Implémenter le tri par bulles sur un tableau de chaînes de caractères.

2. Ajouter un compteur dans les différentes boucles, et afficher des statistiques. Écrire un programme qui génère un tableau de nombre aléatoires entre 0 et 1, écrits sous forme de chaînes de caractères. Tester le tri à bulles sur des tableaux de plus en plus gros.

3. Écrire le programme qui choisit un pivot au hasard et répartit les éléments à droite ou à gauche de ce pivot.

4. Faire de ce programme une fonction qui prend comme paramètre le tableau, et l'index du premier et du dernier élément à manipuler.

5. Compléter le tout pour obtenir un programme de tri rapide.

6. Ajouter des statistiques, en particulier le nombre total d'opérations, et le niveau d'imbrication maximal des appels.

7. En utilisant non plus des appels de fonctions mais des tableaux pour noter les paquets en attente de tri, implémenter la méthode « futée ». Faire des statistiques sur le nombre maximal de paquets en attente de tri.

Éléments de correction.

2. Il faut beaucoup d'étapes.

3. Une seule si $i < j$ (les bulles montent), $j - i$ si $i > j$. On a $\frac{i}{2}$ avec probabilité $\frac{i}{n}$ et 1 sinon, donc en gros $\frac{i^2}{2n}$. Moyennne : $\frac{n}{6}$. Nombre d'étapes : $k(n - \frac{k+1}{2}$.

7. Par récurrence. Hypothèse : si $n \leqslant 2^k$, $m(n) \leqslant k$. Vrai pour $n = 1$ (pas besoin de mémoire pour traiter un tableau à un élément). $n = a + b + 1 \leqslant 2^k$, avec $a \leqslant b$, alors $a < \frac{n}{2}$, donc $a \leqslant 2^{k-1}$, $m(a) \leqslant k - 1$. On a besoin au plus de $m(a) + 1$ ou $m(b)$.

8. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\log n}{\log \frac{4}{3}}$.