Stage olympique de Saint-Malo

Les ovales de Cassini

Mercredi 30 juillet 2003

par

Dimitri ZVONKINE

Table des matières

1 Les courbes algébriques réelles

Définition 1 *Une* courbe algébrique réelle *est l'ensemble des zéros d'un polynôme de deux variables* $P(X, Y)$.

Par exemple, un cercle est une courbe de degré 2, car tout cercle possède une équation qui est un polynôme de degré 2 en X et Y.

Nous allons formuler un problème ouvert concernant les courbes algébriques réelles. C'est un des problèmes de la fameuse liste des problèmes formulés par Hilbert en 1900, en tant qu'héritage que les mathématiques du XIXème siècle laissaient au XXème. Certains de ces problèmes ont été résolus, mais le problème sur les courbes algébriques réelles reste ouvert. Cependant des résultats partiels importants ont été obtenus grâce à la méthode du « patchwork combinatoire ». Nous allons expliquer l'idée de cette méthode dans cette note.

1.1 Les courbes de degré 2

Sur la figure 1 nous avons représenté tous les types de courbes de degré 2. Les quatre types de la ligne du bas sont des courbes *dégénérées* ; nous allons définir précisément ce que cela veut dire dans la section suivante. Désormais nous ne nous intéresserons qu'à des courbes non dégénérées. De plus, sur la figure, nous avons regroupé le cas d'une ellipse, le cas d'une parabole et le cas d'une hyperbole en un seul cas. Toutes ces courbes sont, en fait, « projectivement équivalentes ». Nous allons définir l'équivalence projective dans la section suivante. Intuitivement, on peut imaginer qu'on prend l'ellipse par une oreille et on tire très fort, jusqu'à ce que l'oreille se retrouve à l'infini. On obtient alors une parabole. Si, ensuite, on continue à tirer, l'oreille de l'ellipse réapparaît de l'autre côté du plan, et on obtient une hyperbole.

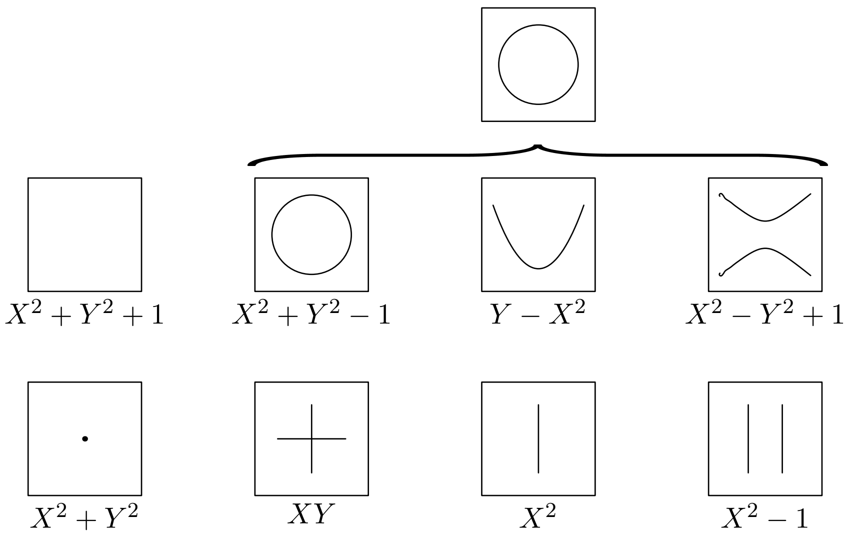


Fig. 1 – Les courbes de degré 2.

Ainsi, modulo l'équivalence projective, il n'y a que deux types de courbes non dégénérées de degré 2 : la courbe vide et l'ellipse.

1.2 Le plan projectif

Définition 2 *Le* plan projectif réel *est l'ensemble de toutes les droites dans* $\mathbb{R}^3$ *passant par l'origine. Autrement dit, un* point *du plan projectif est représenté par une* droite *de* $\mathbb{R}^3$ *qui passe par l'origine.*

Pour comprendre pourquoi on appelle cet ensemble un plan projectif, considérons dans notre espace $\mathbb{R}^3$ le plan horizontal E d'équation $Z = 1$. Presque chaque droite de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine coupe ce plan en un unique point. La seule exception est constituée par les droites horizontales qui, elles, ne coupent pas le plan E du tout. On dit que ces droites horizontales représentent les *points à l'infini* du plan projectif (parce que lorsqu'une droite devient de plus en plus horizontale, son point d'intersection avec E s'en va de plus en plus loin). Ainsi le plan projectif peut être considéré comme la réunion d'un plan ordinaire avec l'ensemble des points à l'infini.

Lorsqu'on a un polynôme $P(X, Y)$ de degré n, on peut lui associer un polynôme *homogène* $Q(X, Y, Z)$ de trois variables, homogène voulant dire que tous les monômes de Q sont de degré exactement n. Par exemple, si $P = X^2 - 3XY + 5Y^2 + 8X + 9Y - 16$, on a $Q = X^2 - 3XY + 5Y^2 + 8XZ + 9YZ - 16Z^2$. L'équation $Q(X, Y, Z) = 0$ détermine une surface dans $\mathbb{R}^3$. Cette surface est, en réalité, un cône ; autrement dit, si un point de $\mathbb{R}^3$ appartient à la surface, alors toute la droite qui relie ce point à l'origine appartient également à la surface.

Pour trouver l'intersection de la surface $Q = 0$ avec le plan E, il faut, évidemment, substituer $Z = 1$ dans Q, ce qui nous redonne le polynôme P. Ainsi l'intersection de la surface $Q = 0$ avec E est précisément la courbe plane d'équation $P(X, Y) = 0$.

Le choix du plan E ci-dessus est arbitraire. On peut très bien le remplacer par un autre plan F qui ne passe pas par l'origine. L'intersection de la surface $Q = 0$ avec F donnera alors une nouvelle courbe algébrique dans F. La courbe sur E et la courbe sur F s'obtiennent l'une de l'autre par *projection centrale*, le centre étant à l'origine. (Ceci découle du fait que la surface $Q = 0$ est un cône.) Cette observation explique le mot « projectif » dans le nom du plan projectif.

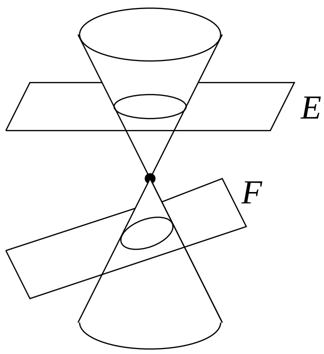


FIG. 2 – Section planes d'un cône

Nous pouvons maintenant définir l'équivalence projective des courbes algébriques et aussi ce que c'est qu'une courbe dégénérée.

Définition 3 *Deux polynômes homogènes* Q_1 *et* Q_2 *sont équivalents si l'on peut obtenir l'un de l'autre par une transformation linéaire des coordonnées* X, Y, Z*. Deux courbes algé-*

briques sont projectivement équivalentes *si elles sont obtenues en intersectant les surfaces $Q_1 = 0$ et $Q_2 = 0$ données par deux polynômes équivalents Q_1 et Q_2, avec deux plans de $\mathbb{R}^3$ ne passant pas par l'origine.*

Les ellipses, les paraboles et les hyperboles s'appellent des « coniques » ou des « sections coniques » justement parce qu'elles sont toutes des sections du cône $Z^2 = X^2 + Y^2$ par différents plans. Ainsi toutes ces courbes sont projectivement équivalentes.

Définition 4 *Un point X, Y, Z différent de l'origine est un* point singulier *pour un polynôme homogène Q si*

$$Q(X,Y,Z) = \frac{\partial Q}{\partial X}(X,Y,Z) = \frac{\partial Q}{\partial Y}(X,Y,Z) = \frac{\partial Q}{\partial Z}(X,Y,Z) = 0\,.$$

Une courbe algébrique est dégénérée *si le polynôme homogène Q associé possède au moins un point singulier.*

<u>*Exercice*</u> : Trouvez les points singuliers des quatre courbes représentées dans la ligne du bas de la figure 1. Notez que dans le dernier cas le point singulier est un point à l'infini.

1.3 Le problème de Hilbert

Une courbe algébrique est composée de plusieurs composantes, appelées *ovales*. Dans le cas le plus simple, un ovale est juste une boucle dans le plan. Cependant un ovale peut être coupé en plusieurs morceaux par les points à l'infini. Par exemple, une hyperbole est composée d'un seul ovale.

<u>*Problème ouvert*</u> : Trouver toutes les dispositions possibles des ovales d'une courbe algébrique de degré n donné sur le plan projectif.

Pour illustrer ce problème nous allons faire une liste de toutes les dispositions possibles d'ovales pour les courbes de degré $\leqslant 4$. Cette liste est représentée sur la figure 3.

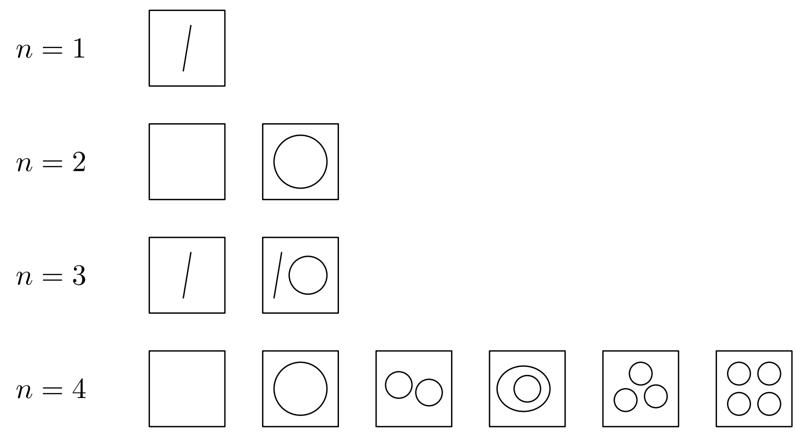


FIG. 3 – Les dispositions possibles des ovales pour le degré $\leqslant 4$.

Le cas de degré 1 est évident : toutes les courbes algébriques sont des droites.

Le cas de degré 2 a été traité plus haut.

Montrons comment obtenir les deux configurations possibles des ovales dans le cas de degré 3. Considérons l'équation $Y^2 = X^3 - X + C$, où C est une constante qu'on va varier. Traçons d'abord le graphe de $X^3 - X$ (figure 4). Varier la constante C revient à déplacer verticalement l'axe des abscisses sur ce graphe. Pour tracer $Y^2 = X^3 - X + C$ il faut prendre la partie du graphe de la figure 4 qui se trouve au-dessus de l'axe des abscisses et extraire la racine carrée de la fonction obtenue. Selon la valeur de C on obtient les courbes de la figure 5. La courbe du milieu étant dégénérée, on ne garde que les deux autres, ce qui nous donne les dispositions d'ovales annoncées.

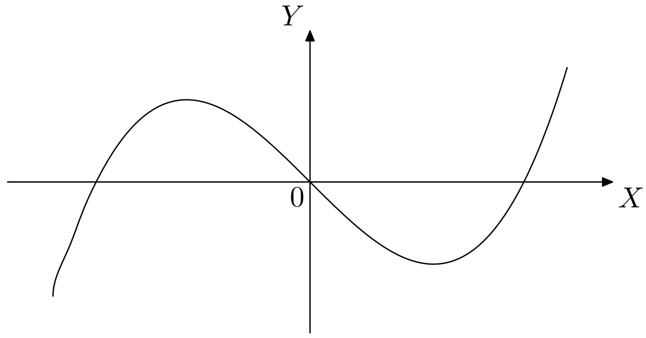


FIG. 4 – Le graphe de $X^3 - X$.

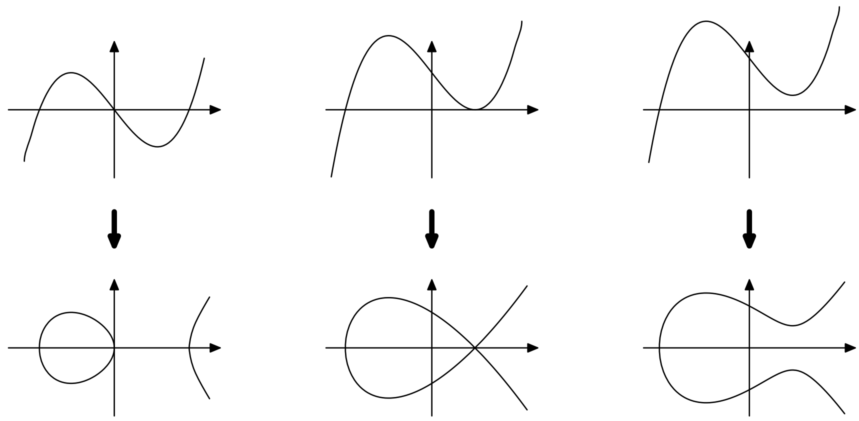


FIG. 5 – Les courbes $Y^2 = X^3 - X + C$.

<u>*Exercice*</u> : Trouver des polynômes de degré 4 qui donnent les dispositions d'ovales de la figure 3. Si vous avez des problèmes avec les deux dernières dispositions, attendez qu'on introduise le patchwork combinatoire, il sert à cela.

Nous n'allons pas donner de preuve complète que les dispositions d'ovales qu'on a représentées sont les seules possibles. Cependant voici un théorème (que nous ne démontrerons pas ici) qui limite le nombre de possiblités.

Théorème 1

Le nombre d'ovales d'une courbe de degré n ne dépasse pas

$$\frac{n^2 - 3n + 4}{2} .$$

Une courbe algébrique peut avoir deux types d'ovales. Le premier type d'ovale est une boucle sur le plan qui entoure une région de ce plan. Une ellipse est un ovale de ce type. Le deuxième type d'ovale est une ligne qui vient de l'infini et qui repart vers l'infini dans le sens opposé. Une droite constitue un ovale du deuxième type. On peut voir que, si le degré n est paire, tous les ovales de la courbe sont nécessairement du premier type, tandis que si n est impaire, la courbe a un unique ovale du deuxième type, et les autres ovales sont du premier type.

Exercice : Montrer que si une courbe de degré 4 a 3 ou 4 ovales, alors aucun de ces ovales ne peut être contenu dans un autre. Indication : une droite coupe une courbe de degré 4 en 4 points au maximum.

2 L'algèbre max-plus

2.1 Une définition de l'algèbre max-plus

Nous allons commencer par introduire l'algèbre max-plus. Le rapport avec les courbes algébriques apparaîtra plus tard.

Dans cette section h est un tout petit nombre réel positif. Les lettres majuscules X, Y, A, B, C, etc. noteront des réels positifs. À chaque réel positif X nous associons un réel $x = h \ln X$, autrement dit, $X = e^{x/h}$.

Propriété 2

Le produit des lettres majuscules correspond à l'addition des lettres minuscules.

Preuve :

▶

$$XY = e^{x/h} \cdot e^{y/h} = e^{(x+y)/h} .$$

◀

Fixons x et y et faisons tendre h vers 0. Pour formuler la proposition suivante, nous devons rendre explicite la dépendance de X et Y en h : nous noterons $X_h = e^{x/h}$, $Y_h = e^{y/h}$. Posons $Z_h = X_h + Y_h$ et $z_h = h \ln Z_h$.

Propriété 3

Quand h tend vers 0, z_h tend vers le maximum de x et y.

Preuve :

► Supposons que $y \leqslant x$. On a $Z_h = e^{x/h} + e^{y/h}$. Or

$$e^{x/h} \leqslant e^{x/h} + e^{y/h} \leqslant 2e^{x/h} = e^{\ln 2} e^{x/h} = e^{(x+h\ln 2)/h}.$$

Ainsi $x \leqslant z_h \leqslant x + h\ln 2$. Donc, quand h tend vers 0, z_h tend vers x. ◄

Ainsi, en partant des opérations $\times$ et $+$ pour les nombres positifs, on est arrivé aux opérations $+$ et max sur les réels. L'ensemble des réels munis de ces deux opérations s'appelle *l'algèbre max-plus*. Bien que cela soit un objet plutôt bizarre, cette algèbre se rencontre dans différents domaines des mathématiques : en théorie de l'optimisation, en mécanique quantique et, comme on va le voir, dans la théorie des courbes algébriques.

2.2 Les graphes des polynômes d'une variable en algèbre max-plus

Considérons pour commencer une droite $Y = AX + B$ avec A et B positifs. Essayons de tracer son graphe dans les coordonnées x, y. Nous allons donc poser $X = e^{x/h}$, $Y = e^{y/h}$, $A = e^{a/h}$, $B = e^{b/h}$, fixer a, b et x, puis faire tendre h vers 0. Le but est de déterminer la valeur de y qu'on obtient dans la limite.

Avec le travail préparatoire de la section précédente, nous pouvons tout de suite donner la réponse. Il suffit de remplacer le produit par la somme et la somme par le maximum dans l'expression $AX + B$. On obtient donc

$$y = \max(x + a, b)\,.$$

Le graphe de cette fonction est tracé sur la figure 6.

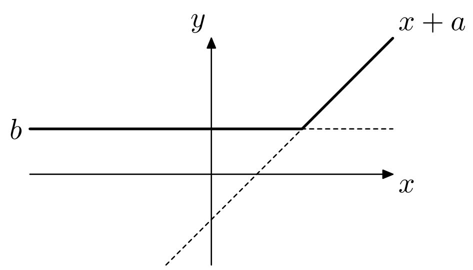


FIG. 6 – Le graphe de $AX + B$ dans l'algèbre max-plus.

Le cas d'un polynôme général n'est pas plus difficile. Par exemple, le polynôme $AX^3 + BX^2 + CX + D$ avec A, B, C, D positifs sera remplacé par $\max(3x + a, 2x + b, x + c, d)$. Pour tracer le graphe de cette fonction, nous devons tracer les quatre droites, puis prendre le maximum. Notez qu'en fonction des coefficients a, b, c, d, certaines de ces droites peuvent ne jamais apparaître dans le graphe final (figure 7).

3 Les fonctions convexes et la transformée de Legendre

3.1 Les fonctions à une variable

Soit I un intervalle fermé fini ou infini de $\mathbb{R}$. Toutes les fonctions considérées ici sont supposées continues.

Définition 5 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est* convexe *si par tout point $(x, f(x))$ du graphe de f passe une droite qui se trouve totalement en-dessous du graphe de f.*

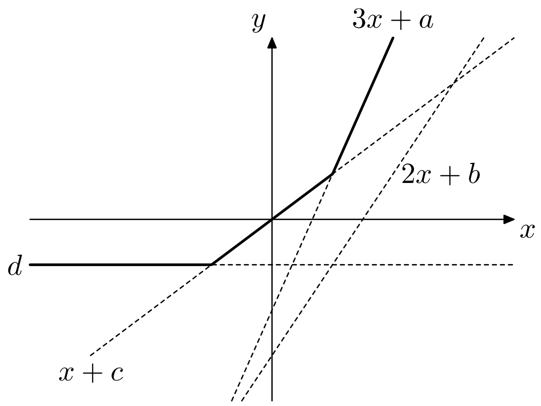


FIG. 7 – Le graphe de $AX^3 + BX^2 + CX + D$ dans l'algèbre max-plus.

Si f est deux fois dérivable, la droite en question est nécessairement la tangente à la courbe, et on peut prouver que la convexité de f est équivalente à la condition $f'' \geqslant 0$. Cependant dans la suite nous allons nous intéresser plus aux fonctions convexes dont les graphes sont composés de segments de droites et de demi-droites, comme sur les figures 6 et 7.

Soit f une fonction convexe de variable x. Nous allons lui associer une autre fonction convexe g d'une autre variable u. La transformation $f \mapsto g$ s'appelle la *transformée de Legendre.*

Voici comment on détermine la valeur de g en un point u. Traçons le graphe de f et la droite $y = ux$. Supposons que la différence $ux - f(x)$ atteint son maximum en un certain point x_0. La valeur maximale de cette différence est par définition la valeur de g en u (figure 8).

Définition 6 *La* transformée de Legendre *d'une fonction convexe f est la fonction g définie par*

$$g(u) = ux_0 - f(x_0) = \max_x (ux - f(x))$$

Exercice : Trouver la transformée de Legendre de la fonction $f(x) = ax^2/2$. Réponse : $g(u) = u^2/2a$.

Exercice : Montrer que lorsqu'on ajoute une constante à f, la transformée de Legendre g diminue de la même constante.

Exercice : Montrer qu'une fonction convexe f a une dérivée à gauche et une dérivée à droite en chaque point.

Notons J le plus petit intervalle fermé (fini ou infini) qui contient l'ensemble de toutes les dérivées à gauche et à droite de f en tous les points. On peut voir que la transformée de Legendre g de f est naturellement définie sur J. Nous n'allons pas rentrer dans les détails ici.

Exercice : Montrer que si le graphe de f est une réunion de segments et de demi-droites, alors il en est de même pour le graphe de g.

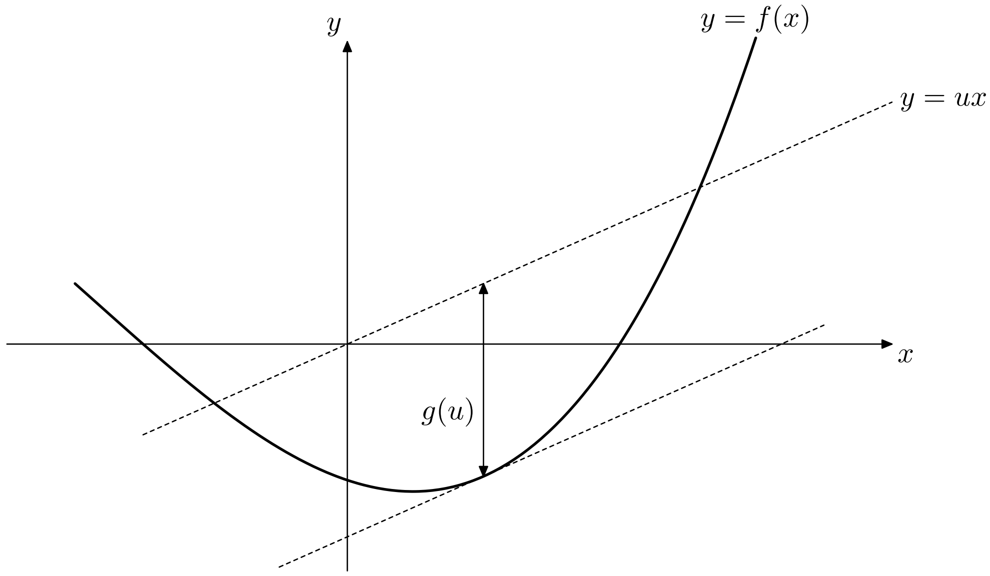


FIG. 8 – La définition de la transformée de Legendre.

Théorème 4

Soit f une fonction convexe et g sa transformée de Legendre. Alors g est une fonction convexe et f est la transformée de Legendre de g.

Preuve :
► À chaque point $x \in I$ nous pouvons associer tous les $u \in J$ tels que la droite de pente u passant par le point $(x, f(x))$ se trouve entièrement sous le graphe de f. D'une façon équivalente, on peut associer à un $u \in J$ tous les points x où le maximum de $ux - f(x)$ est atteint (voir la figure 8). Nous obtenons ainsi une correspondance entre les x et les u. Cette correspondance n'est pas forcément biunivoque, mais chaque x correspond à au moins un u et chaque u correspond à au moins un x. On a alors

$$\forall x \in I,\ \forall u \in J,\ ux - f(x) - g(u) \leqslant 0.$$

L'égalité est atteinte si et seulement si x et u sont en correspondance.

Lorsqu'on met l'inégalité sous cette forme, la symétrie entre f et g devient apparente. La convexité de g et le fait que f est la transformée de Legendre de g découlent facilement de cette inégalité.

Montrons que g est convexe. Pour cela fixons un u_0 et considérons la droite passant par le point $(u_0, g(u_0))$ et de pente x_0, où x_0 est en correspondance avec u_0. Cette droite se trouve entièrement sous le graphe de g. En effet, la différence entre la droite et le graphe de g vaut $ux_0 - f(x_0) - g(u)$. Cette différence vaut bien 0 lorsque $u = u_0$ et est négative ailleurs. Comme on peut construire une telle droite pour tout u_0, on conclut que la fonction g est convexe.

Montrons maintenant que la transformée de Legendre de g est bien f. Fixons un x_0 et un u_0 en correspondance avec x_0. Cherchons le maximum de $ux_0 - g(u)$. On sait que $ux_0 - g(u) - f(x_0)$ est négatif quel que soit u et vaut 0 lorsque $u = u_0$. Donc le maximum de $ux_0 - g(u)$ est atteint en $u = u_0$ et vaut $f(x_0)$. Comme ceci est vrai pour tout x_0, la transformée de Legendre de g est bien f. ◄

Notons aussi qu'au cours de la démonstration nous avons construit une relation importante entre les x et les u. Cette relation vérifie

$$x \sim u \quad \Longleftrightarrow \quad ux - f(x) - g(u) = 0$$

$\Longleftrightarrow$ la droite de pente u passant par $(x, f(x))$ se trouve sous le graphe de f

$\Longleftrightarrow$ la droite de pente x passant par $(u, g(u))$ se trouve sous le graphe de g.

3.2 Les fonctions à deux variables

La convexité et la transformée de Legendre peuvent être définies pour les fonctions de plusieurs variables. Nous aurons besoin de ces notions pour les fonctions de 2 variables.

Une fonction de deux variables est convexe si, pour tout point (x, y), il existe un plan passant par $(x, y, f(x, y))$ et se trouvant entièrement en-dessous du graphe de f.

La transformée de Legendre de f est une nouvelle fonction de 2 variables $g(u, v)$, dont la valeur en (u, v) est le maximum de $ux + vy - f(x, y)$,

$$g(u, v) = \max_{x,y} (ux + vy - f(x, y)).$$

On démontre, comme dans le cas d'une variable, que g est une fonction convexe et que la transformée de Legendre de g est égale à f.

De plus, on peut construire une relation $\sim$ entre les points (x, y) et les points (u, v) qui vérifie les mêmes proriétés que dans le cas d'une variable.

Dans la section suivante nous allons étudier les graphes des polynômes de 2 variables en algèbre max-plus. Nous avons vu dans la section 2.2 que les polynômes d'une variable en algèbre max-plus sont des fonctions convexes constituées de segments de droites. Ces fonctions sont obtenues en prenant le maximum de plusieurs fonctions affines. De même, les polynômes de deux variables en algèbre max-plus seront des fonctions obtenues en prenant le maximum entre plusieurs plans. Ces fonctions sont convexes et leurs graphes sont constitués de polygones plans. On va les appeler des *fonctions convexes affines par morceaux*, car une fonction de la forme $f(x, y) = ax + by + c$ s'appelle une fonction affine.

Nous allons nous concentrer sur ce type de fonctions de 2 variables. Voici quelques résultats sur les fonctions convexes affines par morceaux, sous forme d'exercices.

Exercice : Soit $f(x, y) = ax + by + c$ une fonction dont le graphe est un plan. Trouver sa transformée de Legendre g. Réponse : la fonction g est définie en un unique point $(u, v) = (a, b)$, et on a $g(a, b) = -c$.

Exercice : Supposons que le graphe d'une fonction convexe f contient un polygone du plan d'équation $z = ax + by + c$. Montrer que la valeur de sa transformée de Legendre g au point (a, b) est égale à $-c$.

Exercice : Soient $f_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1$ et $f_2(x, y) = a_2x + b_2y + c_2$ deux fonctions affines et $f = \max(f_1, f_2)$. Autrement dit, le graphe de f est le maximum entre deux plans. Montrer que le graphe de la transformée de Legendre g est le segment reliant les points $(a_1, b_1, -c_1)$ et $(a_2, b_2, -c_2)$.

Exercice : Soient $f_1(x, y) = a_1x+b_1y+c_1$, $f_2(x, y) = a_2x+b_2y+c_2$ et $f_3(x, y) = a_3x+b_3y+c_3$ trois fonctions affines et $f = \max(f_1, f_2, f_3)$. Montrer que le graphe de la transformée de Legendre g est le triangle de sommets $(a_1, b_1, -c_1)$, $(a_2, b_2, -c_2)$ et $(a_3, b_3, -c_3)$.

Exercice : Soient $f_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i$ des fonctions en nombre fini et $f = \max(f_i)$. Montrer que tous les points $(a_i, b_i, -c_i)$ se trouvent au-dessus du graphe de g et que g est la plus grande fonction convexe avec cette propriété.

Le résultat de l'exercice précédent décrit complètement la transformée de Legendre g de la fonction f. Visuellement, on peut se représenter g de la manière suivante. Plaçons dans l'espace les points $(a_i, b_i, -c_i)$ pour tout i. Prenons maintenant une membrane élastique et plaçons-la au-dessous de tous ces points. Lorsqu'on commence à soulever la membrane, elle va s'accrocher aux points que nous avons placés dans l'espace. À la fin, la membrane prendra la forme d'une fonction convexe affine par morceaux, contenant un certain nombre de points parmi les $(a_i, b_i, -c_i)$. D'autres points $(a_i, b_i, -c_i)$ resteront strictement au-dessus de la membrane. La membrane représentera le graphe de g.

Exercice : Montrer qu'un point $(a_i, b_i, -c_i)$ reste strictement au-dessus de la membrane (du graphe de g) si et seulement si la fonction f_i correspondante n'intervient jamais dans le graphe de f, car pour tout point (x, y) il existe une autre fonction f_j vérifiant $f_j(x, y) > f_i(x, y)$.

Exercice : Les graphes de f et de g sont tous les deux composés de polygones (parfois non bornés). Montrer que chaque sommet du graphe de g correspond à un polygone du graphe de f, chaque arête du graphe de g correspond à une arête du graphe de f, chaque polygone du graphe de g correspond à un sommet du graphe de f. De plus, deux sommets de g sont reliés par une arête si et seulement si les deux polygones de f correspondants ont un côté en commun (et inversement).

4 Le patchwork combinatoire

4.1 Le diagramme d'un polynôme

Nous allons maintenant apprendre à déterminer la forme d'une courbe algébrique grâce à la théorie décrite plus haut.

Soit $P(X, Y)$ un polynôme de deux variables. Nous voulons tracer la courbe $P(X, Y) = 0$ dans les coordonnées x, y de l'algèbre max-plus.

Pour être plus précis, nous prendrons les coefficients de P sous la forme $\pm e^{a/h}$, et nous ferons tendre h vers 0. Ainsi le polynôme P dépendra de h (nous noterons $P_h(X, Y)$), et nous allons étudier la forme limite de la courbe $P_h(X, Y) = 0$ lorsque h tend vers 0. Dans les coordonnées x, y cette courbe limite sera composée de plusieurs ovales « anguleux » (affines par morceaux). Lorsque h est suffisamment petit, la disposition des ovales de la courbe $P_h(X, Y) = 0$ sera la même que la disposition des ovales anguleux de la courbe limite.

Le point gênant de cette construction est que les coefficients de P, aussi bien que les nombres X et Y sont tantôt positifs, tantôt négatifs. Or, pour poser $x = h \ln X$, comme nous avons fait dans la description de l'algèbre max-plus, il est nécessaire d'avoir $X > 0$. Pour parer à cette difficulté, nous adopterons la stratégie suivante.

1. Choisir un quart de plan. Ceci revient à déterminer les signes de X et de Y. Si X (respectivement Y) est négatif dans le quart de plan choisi, on fait le changement de variables $X \mapsto -X$ (respectivement $Y \mapsto -Y$). Nous obtenons ainsi un nouveau polynôme $\widetilde{P}$, qui ne se distingue de P que par le signe de certains coefficients.

2. Partager les termes de $\widetilde{P}$ en termes positifs et termes négatifs. Au lieu de l'équation $\widetilde{P}(X, Y) = 0$, nous écrirons alors l'équation $P_+(X, Y) = P_-(X, Y)$, où P_+ et P_- n'ont que des coefficients positifs.
3. Passer en algèbre max-plus. Les polynômes $P_+(X, Y)$ et $P_-(X, Y)$ seront remplacés par des fonctions affines par morceaux $p_+(x, y)$ et $p_-(x, y)$.
4. Tracer les graphes de $p_+(x, y)$ et $p_-(x, y)$ et trouver les points d'intersection entre eux. À cette étape on va appliquer une astuce. On remarque que pour trouver l'intersection des graphes de p_+ et p_-, il suffit de tracer un seul graphe : celui de $\max(p_+, p_-)$. Sur ce graphe, il faut repérer les polygones qui font partie du graphe de p_+ et ceux qui font partie du graphe de p_-. L'intersection entre le graphe de p_+ et celui de p_- sera formée par les arêtes communes à un polygone de p_+ et un polygone de p_-. Toutes les autres arêtes ne nous intéressent pas. Nous noterons g la transfromée de Legendre de $\max(p_+, p_-)$.

Commeçons par traiter un exemple simple : celui du polynôme

$$P(X, Y) = AX^2 - BX + CY^2 - D.$$

Quand on passe à l'algèbre max-plus, les termes de ce polynôme se transforment en $2x + a$, $x+b$, $2y+c$, d. Nous associons à ce polynôme le diagramme suivant (figure 9). Ce diagramme est obtenu à partir des termes du polnôme P de la façon suivante. Si P contient le monôme X^aY^b avec un coefficent non nul, alors on met dans le diagramme un sommet au point (a, b). Ce sommet sera marqué avec un $+$ ou un $-$ selon que le coefficient de X^aY^b dans P est positif ou négatif. Ainsi on obtient tous les sommets situés dans le quart de plan supérieur (la partie $u, v \geqslant 0$). Les autres sommets du diagramme sont obtenus par symétrie (nous expliquerons les signes plus loin).

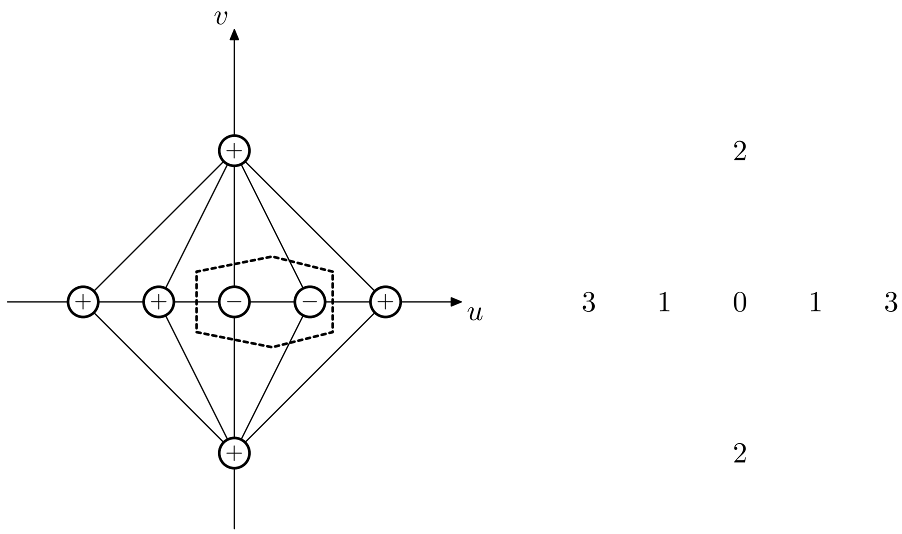


FIG. 9 – Le diagramme du polynôme $AX^2 - BX + CY^2 - D$.

Considérons d'abord le quart supérieur droit de ce diagramme. Chaque point y correspond à un terme de P, donc à un polygone dans le graphe de $\max(p_+, p_-)$, donc à un sommet du graphe de la transformée de Legendre g. Les signes $+$ et $-$ déterminent si le polygone du graphe de $\max(p_+, p_-)$ appartient à p_+ ou à p_-. Par exemple, le point de coordonnées $(2, 0)$ correspond au terme AX^2Y^0, donc à un morceau du plan d'équation $2x + 0y + a$ dans le graphe de p_+, donc au sommet $(2, 0, -a)$ du graphe de g.

Les trois autres quarts de la figure sont des images symétriques du premier et s'obtiennent de celui-ci par des changements de certains signes $+$ et $-$ (en l'occurrence un seul $-$ est remplacé par un $+$). Ces changements de signes sont dus aux changements de variables $X \mapsto -X$, $Y \mapsto -Y$ dont nous avons parlé plus haut. Dans notre exemple, seul le terme $-BX$ change de signe quand on remplace X par $-X$.

Les arêtes tracées entre les sommets du diagramme correspondent aux arêtes du graphe de g. Le graphe de g et ses arêtes dépendent, naturellement, des coefficients a, b, c, d. Nous n'avons pas encore choisi ces coefficients. Il nous faut maintenant le faire, de sorte à rendre convexe la fonction g qui prend les valeurs $-a$, $-b$, $-c$, $-d$ aux points $(2,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $(0,0)$ du diagramme. Une telle fonction convexe est donnée sur la partie droite de la figure 9. Les coefficients a, b, c, d s'obtiennent donc en prenant les opposés des nombres de la figure.

Avant d'expliquer le sens de l'hexagone tracé en pointillé sur la figure, nous allons donner encore deux exercices sur les fonctions convexes.

<u>*Exercice*</u> : Soit un quadrilatère $ABCD$ dans le plan. Associons des nombres réels a, b, c, d à ses sommets. Soit, de plus, S_a l'aire du triangle adjacent au sommet A du quadrilatère, et de même pour S_b, S_c et S_d (figure 10). Considérons la plus grande fonction convexe g prenant les valeurs a, b, c, d aux points A, B, C, D. (C'est donc une fonction affine par morceaux.) Montrer que si $aS_c + cS_a < bS_d + dS_b$, alors le graphe de g a une arête au-dessus de AC (comme sur la figure) ; si $aS_c + cS_a = bS_d + dS_b$, alors le graphe de g est un quadrilatère plan ; si $aS_c + cS_a > bS_d + dS_b$, alors le graphe de g a une arête au-dessus de BD.

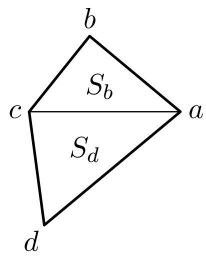


FIG. 10 – Fonctions convexes sur un quadrilatère.

<u>*Exercice*</u> : Montrer qu'on ne peut pas associer de nombres réels aux sommets du diagramme de la figure 11 de sorte à obtenir une fonction convexe g avec les arêtes du diagramme.

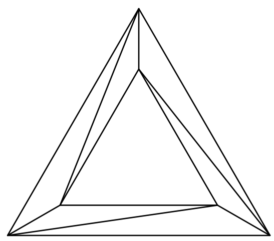
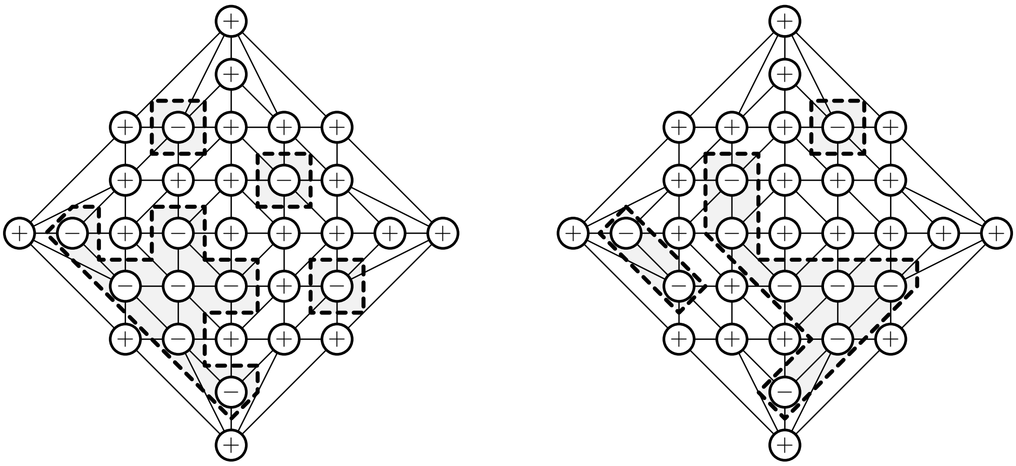


FIG. 11 – Un diagramme non réalisable.

Revenons maintenant à la figure 9 et expliquons le sens de l'hexagone tracé en pointillé. Cet hexagone coupe une et une seule fois chaque arête du diagramme qui relie un $+$ à un $-$. Or un $+$ et un $-$ reliés par une arête représentent deux polygones des graphes de p_+ et p_- qui ont un côté commun. Ce côté commun fait donc partie de la courbe $p_+(x, y) = p_-(x, y)$. Ainsi chaque segment de l'hexagone représente un morceau de la courbe $p_+(x, y) = p_-(x, y)$; la courbe en question a donc la même forme que l'hexagone.



				15				
				9				
		12	7	4	7	12		
		7	2	1	2	7		
15	9	4	1	0	1	4	9	15
		7	2	1	2	7		
		12	7	4	7	12		
				9				
				15				

FIG. 12 – Des diagrammes de polynômes de degré 4 avec 3 et 4 ovales.

L'hexagone est tracé dans le plan de coordonnées u, v, tandis que la courbe $p_+(x, y) = p_-(x, y)$ est définie dans le plan de coordonnées x, y. Par conséquent, ils ne peuvent pas être vraiment égaux. Cependant, comme nous ne nous intéressons qu'à la disposition des ovales de la courbe, nous pouvons oublier la différence entre les deux.

4.2 Conclusion

La méthode du patchwork combinatoire consiste à construire des diagrammes comme ci-dessus avec une disposition d'ovales donnée. C'est un problème d'énumération finie, qu'on peut, par exemple, faire faire à un ordinateur. Pour les polynômes de degré un tant soit peu élevé, c'est la seule méthode connue pour construire différents exemples de dispositions d'ovales.

Nous allons construire, grâce à cette méthode, des polynômes de degré 4 avec 3 ou 4 ovales.

Avant de construire les diagrammes en question, nous allons expliquer pourquoi on ne considère que les diagrammes dont les arêtes les découpent en triangles. Ceci est dû au fait que nous ne considérons que des courbes non dégénérées. Les courbes non dégénérées ont la propriété que leur disposition des ovales ne change pas lorsqu'on modifie un petit peu les coefficients du polynôme. Supposons maintenant que le diagramme de notre polynôme contienne, par exemple, un quadrilatère qui n'est pas divisé en 2 triangles par une arête. Cela veut dire que les points du graphe de g qui se trouvent au-dessus des sommets du quadrilatère sont coplanaires. Mais alors il suffit de changer un tout petit peu les valeurs de g pour que cette condition ne soit plus vérifiée. Or, changer un peu les valeurs de g signifie précisément changer un peu les coefficients du polynôme. Donc quiconque s'intéresse aux courbes non dégénérées peut se limiter aux diagrammes qui ne contiennent que des triangles.

La figure 12 représente des diagrammes de polynômes de degré 4 et les valeurs de la fonction g correspondante. Le premier diagramme donne un polynôme avec 3 ovales et le deuxième un polynôme avec 4 ovales. Il se trouve qu'on peut utiliser la même subdivision en triangles pour les deux, et ne modifier que les signes des coefficients.

Pour finir, voici le résultat complètement explicite de la contruction avec 4 ovales : nous avons prouvé que la courbe $P(X,Y)=0$ pour le polynôme

$$\begin{aligned} P(X,Y) \;\; = \;\; & e^{-15/h}X^4 + e^{-15/h}Y^4 + e^{-12/h}X^2Y^2 + e^{-9/h}X^3 + e^{-9/h}Y^3 \\ & + e^{-7/h}X^2Y + e^{-7/h}XY^2 + e^{-4/h}X^2 + e^{-4/h}Y^2 \\ & - e^{-2/h}XY + e^{-1/h}X + e^{-1/h}Y + 1 \end{aligned}$$

possède 4 ovales si h est suffisamment petit.

Bibliographie commentée

Dans [1], Wilson formule et démontre tous les résultats importants connus en 1978 sur les courbes algébriques réelles.

Dans [2], il y a beaucoup d'exemples d'utilisation du patchwork combinatoire. En particulier, Itenberg et Viro donnent des exemples de courbes réelles avec des dispositions d'ovales qui avaient été conjecturées irréalisables.

Les deux articles sont écrits pour les mathématiciens non spécialistes du sujet, donc sont en partie compréhensibles par un lycéen ou étudiant intéressé.

Références

[1] G. Wilson, *Hilbert's sixteenth problem*, Topology, **17**, 1978, pp 53–73

[2] I. Itenberg, O. Viro, *Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture*, The Mathematical Intelligencer, **18**, 1996, pp 19–28