Exercice 1

On place $n \leq 63$ jetons chacun sur les cases d'un échiquier. Une opération consiste à déplacer un jeton sur une case vide, mais si on ramène un jeton sur une case qu'il a déjà occupée on ne peut plus le déplacer à nouveau. À l'issue d'un certain nombre de telles opérations successives, chaque jeton est retourné à sa position initiale après avoir visité chacune des cases. Prouver qu'il y a eu une position pour laquelle aucun des jetons n'était sur sa case initiale.

Exercice 2

Les points D et E appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$, de sorte que les droites (DE) et (BC) soient parallèles. Soit P un point arbitraire intérieur au triangle ABC. Les droites (PB) et (PC) rencontrent (DE) respectivement en F et G. On appelle O_1 (resp. O_2) le centre du cercle circonscrit à PDG (resp. PFE).

Prouver que (AP) et (O_1O_2) sont perpendiculaires.

Exercice 3

Les élèves d'une classe sont allés se chercher des glaces par groupes d'au moins deux personnes. Il y a eu $k > 1$ groupes en tout. Deux élèves quelconques ne sont jamais partis ensemble plus d'une fois, mais ils ont fait partie d'un même groupe au moins une fois. Prouver qu'il n'y a pas plus de k élèves dans la classe.

Exercice 4

Résoudre, en nombres réels, le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{2003} = 2003 \\ x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2003}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2003}^3 \end{cases}$$

Exercice 5

Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_{101}$ des entiers naturels inférieurs à 5050.

Prouver que parmi ces entiers, on peut en choisir quatre distincts a_k, a_l, a_m, a_n tels que $a_k + a_l - a_m - a_n$ soit divisible par 5050.

Exercice 6

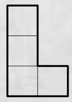
Dans le triangle ABC, on désigne respectivement par a et h_A les longueurs du côté $[BC]$ et de la hauteur issue de A. On note R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit.

Prouver que :

$$ra < h_A R$$

Exercice 7

Prouver qu'un rectangle de $m \times n$ cases-unités peut-être recouvert, sans chevauchement ni débordement, par des pièces de la forme ci-contre si et seulement si $m, n > 1$ et mn est un multiple de 8.



Exercice 8

On considère une rangée infinie de cases numérotées $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ de gauche à droite. Initialement, un jeton est placé sur la case numérotée 2. Alice et Bob jouent selon les règles suivantes :

A tour de rôle, ils avancent le jeton d'autant de cases vers la droite qu'ils le souhaitent, mais d'au moins une et de pas plus de 2003.

Le premier qui amène le jeton sur une case dont le numéro n'est pas un nombre premier perd la partie. C'est Alice qui joue la première. Déterminer lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante.

Exercice 9

Deux cercles Γ_1 et Γ_2 se rencontrent en A et en B. Par le point A passe une droite qui recoupe Γ_1 en C, et Γ_2 en D, avec $A \in [CD]$. On désigne par M et N les milieux respectifs des arcs BC et BD qui ne contiennent pas A, et par K le milieu de $[CD]$.

Prouver que le triangle MKN est rectangle.

Exercice 10

Soit $f(x) = x^3+17$. Prouver que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un entier x pour lequel $f(x)$ est divisible par 3^n mais pas par 3^{n+1}.

Exercice 11

Soit $E = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ un ensemble de $n \geq 3$ points appartenant à un même cercle Γ. Pour $i = 1, \ldots, n$, on désigne par G_i l'isobarycentre des $n-1$ points de $E - \{M_i\}$, et par Δ_i la droite passant par G_i et perpendiculaire à la tangente à Γ en M_i.

Prouver que les droites $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ sont concourantes.

Exercice 12

Initialement, n verres contiennent chacun la même quantité d'eau. On suppose que chaque verre est assez grand pour contenir la quantité totale d'eau. Lors d'une opération, il est seulement possible de verser d'un verre V dans un verre V' exactement la quantité que contenait V' avant cette opération.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles, après un nombre fini d'opérations, il est possible d'avoir versé toute l'eau dans un même verre.

Exercice 13

Sur une feuille de papier carrée $s \times s$, se trouvent un nombre fini de taches d'encre, chacune d'aire ne dépassant pas 1. Aucune droite parallèle à l'un des bords de la feuille ne rencontre plus d'une tache.

Prouver que le domaine formé par l'ensemble des taches d'encre a une aire qui ne dépasse pas s.

Exercice 14

Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{N}^\star$ dans lui-même vérifiant la condition suivante :

$$f\left(x^y\right) = f\left(x\right)^{f(y)}$$

pour tous entiers x et y.

Exercice 15

On considère un ensemble de $2n+1$ droites du plan, deux jamais parallèles ni perpendiculaires et trois jamais concourantes. Trois droites forment donc toujours un triangle non-rectangle.

Déterminer le nombre maximal de triangles aigus qui puissent ainsi être formés.

Exercice 16

Dans un parlement, chaque député a au plus trois ennemis. Prouver qu'il est possible de répartir les députés en deux chambres de sorte qu'aucun député n'ait plus d'un ennemi dans la chambre à laquelle il appartient.

Exercice 17

Soient Γ un cercle et A un point extérieur à Γ. Pour chaque point P de Γ, on construit le carré direct $APQR$.

Déterminer le lieu des points Q lorsque P parcourt Γ.

Exercice 18

On considère un tableau rectangulaire composé de $2m \times 2n$ cases. On colorie chacune de ces cases soit en rouge, soit en bleue, de telle façon qu'il y ait autant de cases bleues que de cases rouges sur chaque ligne et sur chaque colonne.

Chaque fois que l'on a deux cases bleues adjacentes (*ie* qui ont un côté en commun), on relie les centres de ces cases pour un trait bleu. De même, chaque fois que l'on a deux cases rouges adjacentes, on relie leur centre par un trait rouge.

Prouver que l'on a tracé autant de traits rouges que de traits bleus.

Exercice 19

Soient R et r (resp. R' et r') les rayons des cercles circonscrits et inscrits du triangle ABC (resp. $A'B'C'$).

Prouver que si $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et $Rr' = R'r$ alors les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

Exercice 20

Soient k points dans le plan. Chacun d'entre eux est l'origine d'un certain nombre de demi-droites. Deux quelconques de ces demi-droites n'ont aucun point en commun (sauf, éventuellement, leur origine).

Prouver qu'il est possible de tracer $k-1$ segments dont les extrémités sont parmi les k points, de sorte qu'un quelconque de ces segments ne rencontre ni un autre des segments ni l'une des demi-droites sauf, éventuellement, en un des k points.

Exercice 21

La suite S de Kolakoski :

$$1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, \ldots\ldots$$

est un exemple de suite « qui se lit elle-même ». Elle est constituée de groupes de 1 et de groupes de 2 en alternance, la longueur du n-ième groupe étant la valeur du n-ième terme de la suite.

Prouver que le nombre $x = 0,1221122122112\ldots$ est irrationnel.

Exercice 22

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, un point est dit *entier* lorsque ses trois coordonnées sont entières. Un ensemble E de points entiers est dit *non troué* lorsque tout point entier appartenant à un segment dont les deux extrémités sont dans E, appartient lui aussi à E.

Quel est le nombre maximum d'éléments que peut contenir un ensemble non troué s'il ne contient pas 2003 points alignés ?

Exercice 23

Les entiers $1, 2, \ldots, 2n$ ont été répartis en deux groupes A et B de n nombres. On note $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les éléments de A rangés dans l'ordre croissant, et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ les éléments de B rangés dans l'ordre décroissant.

Calculer :

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|$$

Exercice 24

Soient a et b deux réels tels que $a^3 - 3ab^2 = 44$ et $b^3 - 3a^2b = 8$. Que vaut $a^2 + b^2$?

Exercice 25

Dans le plan, on a tracé $n \geq 3$ droites de sorte que chacune d'elles soit divisée en 2 demi-droites et $n-2$ segments de mêmes longueurs par les autres.

Prouver que $n = 3$.

Exercice 26

L'entier $n > 1$ est dit *équilibré* si le nombre de ses diviseurs premiers distincts est égal au nombre de chiffres de son écriture décimale (Par exemple, 15 est équilibré, mais 49 ne l'est pas).

Prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers équilibrés.

Exercice 27

Un entier $n > 0$ est dit *abondant* lorsque la somme de tous ses diviseurs positifs (y compris 1 et lui-même) est supérieure à $2n$. Par exemple, 12 est abondant, car la somme de ses diviseurs est $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.

Soit $a \geq 1$ un entier fixé. Prouver qu'il existe une infinité d'entiers abondants qui sont divisibles par a.

Exercice 28

Soit $k \geq 2$ un entier fixé. Pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par x_n le premier chiffre du nombre n^k (celui de gauche dans l'ecriture décimale).

Prouver que le nombre $0, x_0 x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ est irrationnel.

Exercice 29

Soit n un entier naturel. Le n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est dit *bon* s'il est formé d'entiers strictement positifs tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2n$ et si aucune des différentes sommes formées par les a_i n'est égale à n.

Déterminer tous les bons n-uplets.

Exercice 30

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on note $Z(n)$ le nombre de 0 qui terminent l'écriture décimale de $n!$.

Prouver que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{Z(n)}{n} = \frac{1}{4}$$

Exercice 31

Les cercles Γ_1 et Γ_2, de centres respectifs O_1 et O_2, se rencontrent en A et B. Soit $P \in]AB[$ autre que le milieu de $[AB]$. La droite menée par P et perpendiculaire à (O_1P) rencontre Γ_1 en C et en D. La droite menée par P et perpendiculaire à (O_2P) rencontre Γ_2 en E et en F.

Prouver que C, D, E et F sont les sommets d'un rectangle.

Exercice 32

Trouver toutes les suites de nombres entiers (x_n) telles que ij divise x_i+x_j pour toute paire d'entiers i et j.

Exercice 33

Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$...).

Prouver que, pour tout $n \geq 2$, l'ensemble $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ peut-être partitionné en deux ensembles A et B tels que :

$$1 \leq \frac{\prod_{i\in A} p_i}{\prod_{i\in B} p_i} \leq 2$$

Exercice 34

On considère un polygone convexe à 2003 sommets. Prouver qu'il est possible de choisir 2001 points du plan de sorte que tout triangle dont les sommets sont des sommets du polygone contienne exactement un de 2001 points choisis en son intérieur.

Exercice 35

Pour $n \in \mathbb{N}^{\star}$, on note $d\left(n\right)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

Existe-t-il un entier $n \geq 1$ tel que $d(2n^2) = 28$ et $d(3n^2) = 30$?

Exercice 36

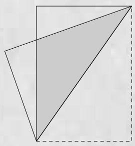
On note a, b et c les longueurs des côtés du triangle ABC, et R le rayon de son cercle circonscrit.

Prouver que si ABC n'est pas obtus alors :

$$\left(\frac{2\widehat{A}}{\pi}\right)^{\frac{1}{a}} \left(\frac{2\widehat{B}}{\pi}\right)^{\frac{1}{b}} \left(\frac{2\widehat{C}}{\pi}\right)^{\frac{1}{c}} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{R}}$$

Quand l'égalité a-t-elle lieu ?

Exercice 37



Une feuille de papier rectangulaire de côtés a et b est pliée selon l'une de ses diagonales.

Déterminer l'aire de la partie grisée.

Exercice 38

Une suite strictement croissante (x_n) d'entiers strictement positifs vérifie :

$$x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2$$

pour tout $n > 2003$.

Prouver que $x_n = n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 39

Déterminer tous les couples (x, k) d'entiers positifs qui vérifient l'équation :

$$3^k - 1 = x^3$$

Exercice 40

Soit $p = 4n + 1$ un nombre premier. Calculer :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\left[\frac{2k^2}{p}\right] - 2\left[\frac{k^2}{p}\right] \right)$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière.

Exercice 41

Prouver que l'équation $a^{15} + b^{15} = c^{16}$ admet une infinité de solutions en entiers strictement positifs.

Exercice 42

Prouver qu'il n'existe pas 5 entiers strictement positifs impairs et deux à deux distincts, tels que chacun d'entre eux divise la somme des quatre autres.

Exercice 43

Soit S un ensemble de $n \geq 4$ points du plan tel que la distance entre deux quelconques d'entre eux soit toujours un entier. Prouver que parmi toutes les paires (A, B) de points distincts de S, au moins $\frac{1}{6}$ de ces paires sont telles que $AB \equiv 0 \pmod 3$.

Exercice 44

Un groupe de 4 cases-unités d'un tableau carré de 25×25 est appelé un *quarté* lorsque les centres de ces cases forment un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes.

Quel est le nombre maximal de quartés formés deux à deux par des cases distinctes ?

Exercice 45

Prouver que le plan n'est pas la réunion des régions intérieures à un nombre fini de paraboles.

Exercice 46

Etant donnés un triangle et un échiquier noir et blanc infini, démontrer que le triangle peut-être placé sur l'échiquier de sorte que chacun de ses sommets soit à l'intérieur d'une case blanche.

Exercice 47

Une infinité d'ampoules et une infinité d'interrupteurs sont chacune numérotées à l'aide des entiers positifs. Chaque interrupteur possède un nombre fini de positions. Qu'une ampoule donnée soit allumée ou éteinte ne dépend que de la position d'un nombre fini d'interrupteurs. Quelle que soit la position des interrupteurs, au moins une ampoule est allumée.

Prouver qu'il existe un ensemble fini d'ampoules telles que, quelle que soit les positions respectives des interrupteurs, au moins une de ces ampoules est allumée.

Exercice 48

Soient a et b deux entiers positifs tels que $a + b$ soit impair.

Prouver que, dans toute répartition des entiers naturels en deux groupes disjoints, il existe deux nombres appartenant à un même groupe et dont la différence est égale à a ou à b.

Exercice 49

Soit Δ une droite qui ne rencontre pas le cercle Γ de centre O. Soit E le projeté orthogonal de O sur Δ, et M un point de Δ. Les tangentes à Γ issues de M rencontrent Γ respectivement en A et B, et (AB) rencontre (OE) en X.

Prouver que la position du point X ne dépend pas du choix de M sur Δ.

Exercice 50

Soit E un ensemble de $n \geq 2$ points du plan. On désigne respectivement par D et d la plus grande et la plus petite distance entre deux points distincts de E. Prouver que :

$$D > \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{n}-1\right) d$$

Exercice 51

Alice et Bob jouent au jeu suivant : sur une table, sont disposés 2003 jetons. À tour de rôle, chaque joueur enlève au moins un jeton mais pas plus de la moitié de ceux qui restent sur la table au moment où il doit jouer. Celui qui laisse le dernier jeton sur la table perd la partie.

Déterminer lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante et décrire une telle stratégie.

Exercice 52

Soit P un polynôme à coefficients entiers et de degré au moins égal à 2.

Prouver qu'il existe une suite arithmétique infinie (dans les deux directions) qui ne contient aucun nombre de la forme $P(k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 53

Le point C appartient au segment $[AB]$. Une droite passant par C rencontre le cercle de diamètre $[AB]$ en E et F, le cercle de diamètre $[AC]$ également en M, et le cercle de diamètre $[BC]$ également en N.

Prouver que $MF = EN$.

Exercice 54

Soit P un point arbitraire à l'intérieur du quadrilatère cyclique $ABCD$. Soient K, L, M et N les projetés orthogonaux de P respectivement sur les droites (AB), (BC), (CD) et (DA).

Prouver que :

$$AB \times PM + CD \times PK = BC \times PN + DA \times PL$$

Exercice 55

Soit $K > 0$ un entier. La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est définie par $a_1 = 1$ et a_n est le n-ième entier naturel supérieur à a_{n-1} qui soit congru à n modulo K.

Déterminer une formule explicite de a_n.

Exercice 56

Soit S un ensemble infini de points du plan tel que si A, B et C sont trois points quelconques dans S, la distance de A à la droite (BC) soit un entier.

Prouver que les points de S sont tous alignés.

Exercice 57

On a des pièces de 1, 2, 5, 10, 20, 50 centimes et de 1 euro.

Prouver que si, avec N de ces pièces, il est possible de payer une facture de M centimes, alors il est possible de payer une facture de N euros avec M pièces.

Exercice 58

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n^3 - 12u_n - 9 \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$$

Montrer qu'il y a au moins mille fois le chiffre 9 dans l'écriture décimale de u_{10}.

Exercice 59

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant :

$$f(x+y)\,f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2$$

Exercice 60

Un nombre de six chiffres $abcdef$ (les premiers chiffres pouvant être nuls) est dit *chanceux* si la somme de ses trois premiers chiffres est égale à la somme de ses trois derniers, c'est-à-dire donc si $a+b+c=d+e+f$.

Prouver que la somme de tous les nombres chanceux est un multiple de 13.