Solutions trouvées par les élèves

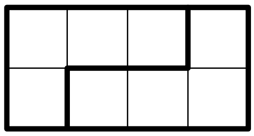
Solution de l'exercice 6 (Bruno Le Floch et Igor Kortchemski) :

On a $a \leqslant 2R$ et $a < b + c$ (inégalité triangulaire). Donc $2a < a + b + c$ et ainsi $a^2 < R\,(a + b + c)$. Donc :

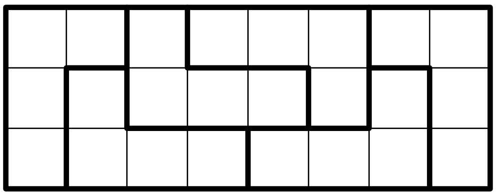
$$\begin{aligned}
a \times h_A \times a &< h_A \times R \times \frac{2\,(a+b+c)}{2} \\
\frac{ah_A}{2} \times \frac{1}{p} \times a &< h_A \times R \\
\frac{S}{p} \times a &< h_A \times R \\
r \times a &< h_A \times R
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7 (Ilia Smilga) :

Supposons que m et n soient strictement supérieurs à 1 et que le produit mn soit un multiple de 8. Alors, si une des deux longueurs est multiple de 4 et l'autre multiple de 2, on répète le pavage ci-contre, recouvrant ainsi tout le rectangle.

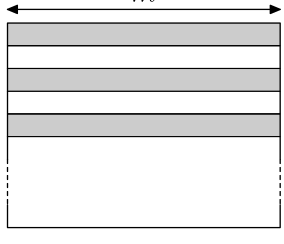


Sinon, c'est par exemple que m est multiple de 8 et n est impair. Comme $n > 1$, il est en fait supérieur ou égal à 3. On peut donc découper une bande de taille $3 \times m$, que l'on pave de la façon suivante :



Le pavage de la partie restante se fait alors comme dans le premier cas.

Réciproquement, supposons qu'un tel pavage soit possible. La forme de la pièce impose clairement $m, n > 1$. D'autre part, des considérations élémentaires d'aire prouvent que le produit mn est déjà un multiple de 4. Supposons que ce ne soit pas un multiple de 8 ; le pavage doit donc se faire *via* un nombre impair de pièces. D'autre part, une des deux longueurs, disons m, est paire. On colorie ensuite le rectangle de la façon suivante :



Il est facile de constater que quelle que soit sa position, chaque pièce recouvre un nombre impair de cases grisées. Il y a par contre, un nombre pair de cases grisées, puisqu'il y en a déjà un nombre pair sur chaque ligne. On a donc besoin d'un nombre pair de pièces, ce qui contredit la première remarque.

Solution de l'exercice 8 (Pierre Bertin) :

C'est Alice qui joue en première qui a une stratégie gagnante. Posons $k = 2003$. Il est bien connu que les nombres $(k+1)! + 2, pak + 1! + 3, \ldots, (k+1)! + k + 1$ sont des entiers consécutifs composés et supérieurs à 2. Ceci assure que le jeu s'arrête.

Soit a_1 le plus petit entier positif tel que les entiers $a_1 + i$ soient tous composés pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Alors $a_1 \geqslant 3$ et pour cause de minimalité a_1 est premier.

Si le fait d'amener le jeton sur la case de numéro a permet d'assurer la victoire, on dira que a est *gagnant*. Il est clair que a_1 est gagnant. À partir de a_1, on construit alors une suite a_p selon la procédure suivante. Si a_p est construit et $a_p - k \leqslant 2$, on s'arrête. Si a_p est construit, et $a_p - k > 2$, on désigne par a_{p+1} le plus grand nombre premier inférieur à $a_p - k$. Par récurrence, on prouve sans difficulté que a_p est gagnant et si a_{p+1} est construit, alors a_{p+1} est gagnant.

Soit a_n le dernier terme de la suite. Comme le seul test d'arrêt est d'atteindre un terme qui ne dépasse pas $k+2$, c'est donc que $a_n \leqslant k+2$. Si $a_n = 2$, alors $n \geqslant 2$ et par maximalité de a_n, c'est que $a_{n-1} = k + 3 = 2006$ (car 2 et 3 sont tous les deux premiers). Ce qui contredit que a_{n-1} est premier. Donc $a_n \geqslant 3$, et pour son premier coup, Alice peut placer le jeton sur a_n assurant ainsi sa victoire.

Remarque : La solution suivante est dûe à Bruno Le Floch. Supposons par l'absurde que Bob ait une stratégie gagnante. Alice commence alors par jouer en 3. Dans ce cas, Bob peut suivre sa stratégie et répondre à cette attaque victorieusement en jouant par le nombre nombre k compris évidemment entre 4 et 2006. Bien évidemment, il ne va pas jouer 2006 qui n'est pas premier. k est donc inférieur ou égal à 2005 et Alice aurait pu le jouer directement, volant ainsi la stratégie de Bob. On obtient une contradiction. Le jeu se terminant forcément avec une victoire, c'est Alice qui a une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 14 (Bruno Le Floch) :

On a :

$$f\left(c^{c^n}\right) = f(c)^{f(c^n)} = f(c)^{f(c)^{f(n)}}$$

D'autre part :

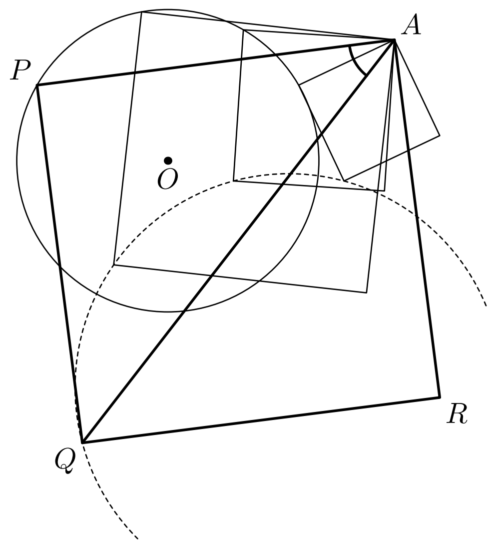
$$f\left(c^{c^n}\right) = f\left(\left(c^{c^{n-1}c}\right)\right) = f\left(\left(c^{c^{n-1}}\right)^{f(c)}\right) = \ldots = f\left(c^c\right)^{f(c)^{n-1}} = f(c)^{f(c)^n}$$

Si f n'est pas constante égale à 1, alors $f(c)^n = f(c)^{f(n)}$, puis $f(n) = n$.

Les seules fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle sont l'identité et la fonction constante égale à 1 (qui conviennent bien).

Solution de l'exercice 17 (Antony Lee, Bruno Le Floch et Igor Kortchemski) :

Soit s la simitude de centre A, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$. On a $s(P) = Q$. Soient O le centre de Γ et R son rayon. Ainsi Q décrit un cercle de centre $s(O)$ et de rayon $R\sqrt{2}$.



Solution de l'exercice 26 (Antony Lee) :

Supposons que n soit équlibré. On écrit n sous la forme :

$$n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} 7^{\alpha_4} p_5^{\alpha_5} \dots p_k^{\alpha_k}$$

où les p_i, pour $i \geqslant 5$, sont premiers deux à deux distincts et les α_i sont des naturels non nuls sauf éventuellement α_1, α_2, α_3 et α_4.

Ainsi n a au plus k diviseurs premiers distincts, donc $n < 10^{k+1}$ puisqu'il est équilibré.

Comme $p_5, \dots, p_k \geqslant 11$, on a $p_5 \dots p_k \geqslant 11^{k-4}$. De plus, clairement :

$$n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} 7^{\alpha_4} p_5^{\alpha_5} \dots p_k^{\alpha_k} \geqslant p_5 \dots p_k$$

D'où $10^{k+1} > n \geqslant 11^{k-4}$, soit $\left(\frac{11}{10}\right)^k < 10 \times 11^4$. Comme $\left(\frac{11}{10}\right)^k$ tend vers l'infini quand k tend vers l'infini, k ne peut dépasser une valeur fixée.

Les nombres équilibrés ont donc un nombre de chiffres (en base 10) inférieur à une constante. L'ensemble des nombres équilibrés est donc fini.

Solution de l'exercice 27 (Thibaut Kirchner) :

Pour $n \geqslant 7$, les nombres 1, 2, 3, 6, n, $2n$, $3n$, $6n$ sont des diviseurs distincts de $6n$. Leur somme, $12n + 12$ est supérieure à $12n$, donc $6n$ est abondant pour tout $n \geqslant 7$ et en particulier pour une infinité de multiples de a.

Solution de l'exercice 28 (Antony Lee, Bruno Le Floch et Igor Kortchemski) :

On va montrer que parmi les termes de la suite, on peut trouver une série de 1 aussi longue que l'on veut. Comme d'un autre côté, on va prouver que la suite n'est pas constante à partir d'un certain rang, cela permettra directement de conclure.

Prenons $n = 10^j$. Alors $n^k = 10^{jk}$ commence par 1, donc $x_n = 1$. Mais le nombre $\left[10^j \times \sqrt[k]{2}\right]^k < 2 \times 10^{jk}$ commence par un 1 également. De façon plus générale, pour tout i compris entre 10^j et $\left[10^j \times \sqrt[k]{2}\right]$, on a $x_i = 1$. Le nombre de i concernés par cette dernière propriété croît indéfiniment avec j, ce qui assure la première partie de la conclusion.

D'autre part, pour tout j, le nombre $\left(1 + \left[10^j \times \sqrt[k]{2}\right]\right)^k$ commence par un 2, ce qui suffit pour conclure.

Solution de l'exercice 29 (Antony Lee, Bruno Le Floch, Igor Kortchemski) :

Considérons d'abord les n-uplets ordonnés $(a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n)$. Si $a_1 \neq 1$, on a $a_1 \geqslant 2$, donc $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant n a_j$, quel que soit l'entier j compris entre 1 et n. Or, cette somme vaut $2n$, donc tous les a_j sont à la fois inférieurs et supérieurs à 2. Le n-uplet est donc $(2, \ldots, 2)$. Sinon, le n-uplet commence par 1.

Démontrons par récurrence que les seules solutions possibles sont $(1, \ldots, 1, n+1)$ et $(2, \ldots, 2)$. Pour $n = 2$, on a comme solution $(1, 3)$ et on peut toujours considérer que $(2, 2)$ est « possible ».

Si pour $n-1$, les solutions possibles se comptent parmi $(1, \ldots, 1, n)$ et $(2, \ldots, 2)$, alors on a déjà vu que, à part $(2, \ldots, 2)$, toutes les solutions s'écrivent $(1, x_2, \ldots, x_n)$. Grâce à la condition disant que toutes les sommes partielles doivent être différentes de n, on obtient ici que les sommes partielles de x_i pour $2 \leqslant i \leqslant n$ sont différentes de n et de $n-1$.

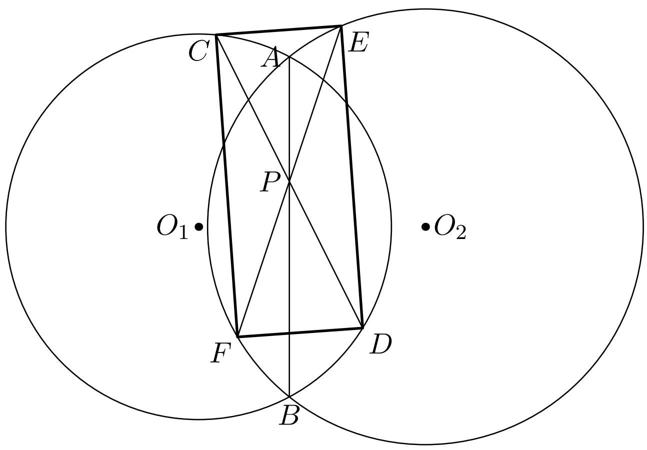
De cela, on obtient directement que les sommes partielles de $E = \{x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n - 1\}$ ne valent jamais ni $n-1$. Le $(n-1)$-uplet $(x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n - 1)$ vérifie l'hypothèse de récurrence et est donc soit de la forme $(1, \ldots, 1, n)$, soit de la forme $(2, \ldots, 2)$.

Dans le premier cas, comme $n \geqslant 2$ et $x_n \geqslant x_i$ pour tout $i \leqslant n$, on trouve que le n-uplet d'origine est $(1, \ldots, 1, n+1)$.

Dans le second cas, on trouve comme n-uplet de départ $(1, 2, \ldots, 2, 3)$, mais toutes les sommes paires de 2 à $2\,(n-2)$ sont atteintes, ainsi que, du coup, les valeurs impaires de 3 à $2n-3$. L'entier n fait partie de ces nombres et ce n-uplet n'est donc pas solution.

Ceci termine la récurrence.

Solution de l'exercice 31 (Igor Kortchemski) :



Les droites (EF) et (PO_2) sont perpendiculaires. Or $EO_2 = O_2F$, donc O_2EF est isocèle et P est le milieu de $[EF]$. De même P est le milieu de $[CD]$. On en déduit que $CEDF$ est un parallélogramme.

On voudrait montrer que $EP = CP$: les diagonales de $CEDF$ seront alors de même longueur et le quadrilatère sera bien un rectangle. On calcule la puissance de P par rapport aux cercles Γ_1 et Γ_2, qui valent respectivement $PC \cdot PD = -PC^2$ et $PF \cdot PE = -PE^2$. Or P est sur la droite (AB), axe orthique des deux cercles, donc ces puissances sont égales, d'où l'égalité voulue.

Solution de l'exercice 32 (Antony Lee) :

Pour tous entiers naturels i et j, on a $i|x_i + x_j$ (car $ij|x_i + x_j$) et $i|x_i + x_{j+1}$, d'où i divise $x_{j+1} - x_j$. Comme i est quelconque et peut donc être arbitrairement grand, on a $x_{j+1} - x_j = 0$ pour tout j. Donc la suite est constante.

D'autre part, pour tout i, on a : $i^2|2x_i = 2x_1$. De même que précédemment, on trouve $x_1 = 0$, puis $x_i = 0$ pour tout i.

La seule suite qui vérifie les conditions de l'énoncé est la suite nulle.

Solution de l'exercice 35 (Bruno Le Floch) :

Posons $n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. Le nombre de diviseurs de $2n^2$ est :

$$d\left(2n^2\right) = (2\alpha + 2)(2\alpha_1 + 1)\dots(2\alpha_k + 1) = 28$$

Le seul facteur pair de ce produit est $2\alpha + 2$; il vaut donc soit 4 soit 28.

Si $2\alpha + 2 = 4$, alors $\alpha = 1$ et forcément $\alpha_1 = 3$. D'où $n = 2p_1^3$. D'autre part $d\left(3n^2\right) = d\left(2^2 \times 3 \times p_1^6\right)$. Si $p_1 = 3$, alors $d\left(3n^2\right) = 24 \neq 30$. Sinon, $d\left(3n^2\right) = 42 \neq 30$. Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.

Si $2\alpha + 2 = 28$, alors $\alpha = 13$ et $n = 2^13$. On calcule $d\left(3n^2\right) = 54 \neq 30$. Il n'y donc pas de solution, ici, non plus.

Solution de l'exercice 38 (Antony Lee, Bruno Le Floch, Igor Kortchemski) :

Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_n$. On a, pour $n \geqslant 2004$:

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^3 + x_1^3 + \dots + x_n^3 &= (x_1 + \dots + x_n + x_{n+1})^2 \\
x_{n+1}^3 + (x_1 + \dots + x_n)^2 &= (S_n + x_{n+1})^2 \\
x_{n+1}^3 + S_n^2 &= S_n^2 + 2S_n x_{n+1} + x_{n+1}^2 \\
x_{n+1}^2 - x_{n+1} &= 2S_n \\
S_n &= \frac{x_{n+1}^2 - x_{n+1}}{2} = \sum_{i=1}^{x_{n+1}-1} i
\end{aligned}$$

Or, comme (x_n) est strictement croissante, $S_n \leqslant \sum_{i=x_{n+1}-n}^{x_{n+1}-1} i$. Or :

$$\sum_{i=1}^{x_{n+1}-1} i \leqslant \sum_{i=x_{n+1}-n}^{x_{n+1}-1} i \leqslant \sum_{i=1}^{x_{n+1}-1} i$$

On en déduit que $x_{n+1} - n = 1$ pour $n \geqslant 2004$. Or (x_n) est strictement croissante, donc pour tout $n \geqslant 1$, $x_n = n$.

Solution de l'exercice 41 (Bruno Le Floch) :

Premièrement $a = b = c = 2$ est solution de l'équation. Ensuite, si on a une solution (a, b, c), le triplet $\left(2^{16}a, 2^{16}b, 2^{15}c\right)$ est aussi solution. En effet :

$$\begin{aligned}
\left(2^{16}a\right)^{15} + \left(2^{16}b\right)^{15} &= 2^{16\times15}a^{15} + 2^{16\times15}b^{15} \\
&= 2^{16\times15}\left(a^15 + b^15\right) = 2^{16\times15} \cdot c^{16} = \left(2^{15}c\right)^{16}
\end{aligned}$$

Il y a donc une infinité de solutions.

Solution de l'exercice 42 (Antony Lee, Bruno Le Floch et Igor Kortchemski) :

On pourrait trier les nombres (s'ils existaient) que l'on nommera a, b, c, d et e en ordre croissant : $a < b < c < d < e$.

On a $e|a+b+c+d$. Or $4e > a+b+c+d$, et e est impair, alors que $a+b+c+d$ est pair, donc $2e = a+b+c+d$.

On a aussi $d|e+a+b+c$. Or $e+a+b+c = 3e-d$, donc $d|3e-d$, puis $d|3e$. Or $4d > a+b+c+d = 2e$, donc $d > \frac{e}{2}$. On a donc $\frac{e}{2} < d < e$ et $d|3e$. Mais d et $3e$ sont impairs donc $\frac{3e}{d}$ est impair. Or $3 < \frac{3e}{d} < 6$, donc $\frac{3e}{d} = 5$, puis $d = \frac{3}{5}e$.

On a en résumé $2e = a+b+c+\frac{3}{5}e$, donc $\frac{7}{5}e = a+b+c$ et $d = \frac{3}{5}e$. De plus, $a < b < c < d < e$. On a $c|d+e+a+b$. Or $d+e+a+b = \frac{8}{5}e + \frac{7}{5}e - c = 3e - c$. On a donc $c|3e-c$ puis $c|3e$. Or $3c > a+b+c = \frac{7}{5}e$, donc $c > \frac{7}{15}e$, mais $a < d = \frac{3}{5}e = \frac{9}{15}e$, donc $\frac{7}{15}e < c < \frac{9}{15}e$, puis $5 < \frac{3e}{c} < \frac{45}{7} < 7$. Or $\frac{3e}{c}$ est impair, ce qui est impossilble.

Remarque : On pouvait aussi utiliser l'approche suivante. Supposons que $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ soient cinq entiers impairs tels que chacun divise la somme des quatre autres. Appelons $S = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$. Alors S est impair et pour tout i, a_i divise S. On définit $x_i = \frac{S}{a_i}$, c'est un entier impair. On a :

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5} = 1$$

On utilise alors une méthode classique :

$$1 = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5} < \frac{5}{x_1}$$

d'où $x_1 < 5$ et donc $x_1 = 3$. On continue :

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5} < \frac{4}{x_2}$$

d'où $x_2 < 6$ et donc $x_2 = 5$. Ensuite :

$$\frac{7}{15} = \frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5} < \frac{3}{x_3}$$

d'où $5 < x_3 < \frac{45}{7} < 7$. Contradiction.

Solution de l'exercice 45 (Thibaut Kirchner) :

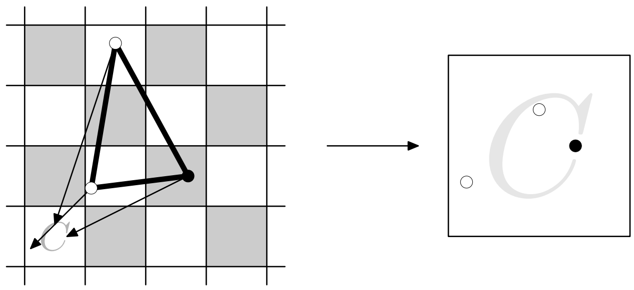
Une parabole donnée ne recouvre entièrement une demi-droite que si celle-ci est parallèle à son axe de symétrie. Dans le cas contraire, elle ne peut recouvrir qu'un segment.

Un ensemble fini de paraboles étant donné, on choisit une direction parallèle à aucun des axes. Une droite dirigée ainsi n'intersectera la réunion des régions intérieures des paraboles que selon une réunion de segments, qui est une partie bornée de la droite. D'où la conclusion.

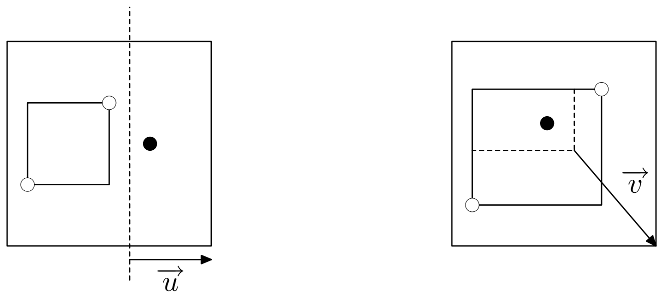
Solution de l'exercice 46 (Antony Lee, Bruno le Floch et Igor Kortchemski) :

Si les sommets du triangle sont placés sur trois cases de même couleur, quitte à tout translater d'une case, on peut supposer que celles-ci sont blanches, et donc que le problème est résolu.

Sinon, pour des raisons analogues, on peut supposer que deux sommets sont blancs (*ie* placés sur une case blanche) et le troisième est noir (*ie* placé sur une case noire). Commençons par fixer une case C et superposons toutes les cases de damier à cet endroit en effectuant des translations :



Quitte à tourner légèrement le triangle, on peut supposer que deux quelconques des trois points précédents ne sont ni sur une même horizontale, ni sur une même verticale. On construit le rectangle dont les coins opposés sont les deux points blancs et dont les côtés sont parallèles aux axes. Les deux cas suivants se présentent alors :



Si le point noir est à l'extérieur du rectangle (dessin de gauche), on choisit une droite horizontale ou verticale (selon la position du point noir) qui sépare ce dernier point du rectangle. En effectuant une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, on pousse le point noir à l'extérieur de la case, devenant ainsi blanc.

Sinon, le point noir est à l'intérieur du rectangle (dessin de droite) et il est toujours possible de délimiter un rectangle qui enferme le point noir (cf. figure). La translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ pousse les points blancs à l'extérieur de la case, chacun dans une case adjancente, les rendant ainsi noir. On a donc un triangle monochromatique et on conclut comme expliqué au tout début.

Solution de l'exercice 48 (Bruno Le Floch et Igor Kortchemski) :

On note X_1 et X_2 les deux ensembles. Supposons par l'absurde que pour tout x dans X_1, les nombres $x+a$ et $x+b$ appartiennent à X_2.

Supposons par exemple que $0 \in X_1$. Alors $a \in X_2$ et $b \in X_2$, puis $2a \in X_1$ et $2b \in X_1$, puis $3a \in X_2$ et $3b \in X_2$... De façon générale, pour tout entier $k \geqslant 0$, les nombres $2ka$ et $2kb$ sont dans X_1, et les nombres $(2k+1)\,a$ et $(2k+1)\,b$ sont dans X_2.

La somme $a+b$ étant impaire, on peut supposer que a est pair et b est impair. Alors $a = 2a'$ et $b = 2b'+1$. Donc $2a'b = (2b'+1)\,a$. D'après ce qui précède, $(2b'+1)\,a \in X_2$ et $2a'b \in X_1$, ce qui contredit la disjonction de X_1 et X_2.

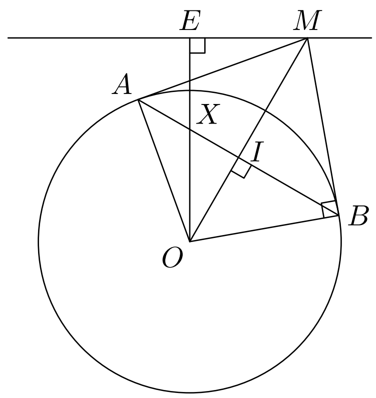
Solution de l'exercice 49 (Thibaut Kirchner, Antony Lee) :

Soit I le point d'intersection de (OM) et (AB). Les points M et O étant tous les deux équidistants de A et B, la droite (MO) et la médiatrice de $[AB]$, et (MO) est perpendiculaire à (AB).

Les triangles IOB et BOM sont semblables puisque $\widehat{OIB} = \widehat{MBO}$ et $\widehat{BOI} = \widehat{MOB}$ et donc $\frac{OI}{OB} = \frac{OB}{OM}$, soit $OI \cdot OM = OB^2$.

Les triangles IOX et EOM sont semblables puisque $\widehat{XIO} = \widehat{MEO}$ et $\widehat{IOX} = \widehat{EOM}$. Ainsi $\frac{OX}{OM} = \frac{OI}{OE}$, soit $OX \cdot OE = OB^2$.

Finalement $OX = \frac{OB^2}{OE}$. La longueur OX est constante et X est situé sur la demi-droite $[OE)$. Le point X a donc bien une position fixe.



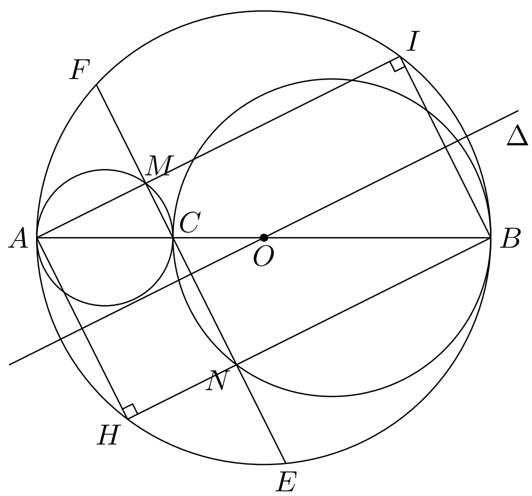
<u>*Solution de l'exercice 51 (Mathieu Aubry. Résolu également par Thibaut Kirchner)*</u> :

Le but du jeu étant de ne pas laisser le dernier pion, on a gagné si on arrive à laisser deux pions en jeu (l'adversaire est obligé de tirer un pion et perd).

Or, s'il reste un nombre n impair de pions, il est toujours possible de faire en sorte que la somme des pions enlevés par l'adversaire le coup précédent et le sien soit égal à la moitié des pions en jeu, c'est-à-dire $\frac{n-1}{2}$. On en déduit que l'on peut gagner après son tour de jeu s'il reste 2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, 1535, etc. pions. A chaque fois, pour passer au nombre suivant, on multiple par 2 puis on ajoute 1.

Or le joueur qui commence peut laisser 1535 pions à son adversaire, il suffit qu'il en retire 468. Il peut donc gagner.

<u>*Solution de l'exercice 53 (Igor Kortchemski)*</u> :



Soient H l'intersection de (BN) et Γ, I celle de (AM) et Γ. Comme $[AB]$ est diamètre de Γ on a $\widehat{AIB} = \widehat{AHB} = \frac{\pi}{2}$. Comme on a $\widehat{AME} = \widehat{MNH} = \frac{\pi}{2}$, le quadrilatère $AMNH$ est un rectangle d'où $\widehat{MAH} = \frac{\pi}{2}$. De même on a $\widehat{NBI} = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent $AIBH$ est un rectangle de centre O.

Soit Δ la droite parallèle à (AI) passant par O. La droite Δ est axe de symétrie des rectangles $AIBH$ et $AMNH$, par conséquent on a $OM = ON$. Soit $R = \frac{AB}{2}$, on a $NF \cdot NE = R^2 - ON^2$ et $MF \cdot ME = R^2 - OM^2$. Par ce qui précède on a donc $NF \cdot NE = MF \cdot ME$, soit $(FM + MN) \cdot NE = FM \cdot (MN + NE)$, d'où $NE = FM$.

Solution de l'exercice 55 (Antony Lee, Bruno Le Floch et Igor Kortchemski) :

D'abord exprimons a_n en fonction de a_{n-1} et de K. Pour cela, remarquons que $a_{n-1} \equiv n-1 \pmod K$, donc le premier nombre supérieur à a_{n-1} conrgru à n modulo K est $a_{n-1}+1$. Le suivant est $a_{n-1} + 1 + K$ et ainsi de suite le n-ième sera $a_n = a_{n-1} + 1 + (n-1)K$. Finalement, on a plus simplement :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 1 + nK \end{cases}$$

Prouvons par récurrence que $a_n = n + \frac{n(n-1)}{2}K$. Pour $n = 1$, cette formule est correcte. Si elle est valide pour n, alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 1 + nK \\ &= n + 1 + K\left(\frac{n(n-1)}{2} + n\right) = (n+1) + K\frac{(n+1)(n+1-1)}{2} \end{aligned}$$

La formule générale pour a_n est donc $a_n = n + \frac{n(n-1)}{2}K$.

Solution de l'exercice 57 (Antony Lee, Bruno Le Floch et Igor Kortchemski) :

On remplace dans la décomposition de M centimes en N pièces :

- chaque pièce de 1 centime par une pièce de 1 euro
- chaque pièce de 2 centimes par deux pièces de 50 centimes (soit 1 euro)
- chaque pièce de 5 centimes par cinq pièces de 20 centimes (soit 1 euro)
- chaque pièce de 10 centimes par dix pièces de 10 centimes (soit 1 euro)
- chaque pièce de 20 centimes par vingt pièces de 5 centimes (soit 1 euro)
- chaque pièce de 50 centimes par cinquante pièces de 2 centimes (soit 1 euro)
- chaque pièce de 1 euro par cent pièces de 1 centimes (soit 1 euro)

On voit que le nombre de pièces obtenues est égal au nombre de centimes M de la facture de départ, et que chaque pièce d'avant donne 1 euro. On obtient bien N euros avec M pièces.

Solution de l'exercice 58 (Antony Lee, Bruno Le Floch et Igor Kortchemski) :

On introduit la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = u_n + 1$. On a donc $v_0 = 5$, $v_1 = 200$. Nous allons prouver par récurrence que 10^{2^i} divise toujours v_i. L'initialisation est faite. Supposons que ce soit vrai pour un certain n fixé. Alors :

$$v_{n+1} = 4v_n^3 - 12v_n^2 = v_n^2(4v_n - 12)$$

Comme 10^{2^n} divise v_n, on a $10^{2^{n+1}}$ divise v_n^2 puis v_{n+1}.

Donc, pour tout n, v_n se termine par 2^n zéros et par suite u_n se termine par $2^n - 1$ neufs. L'écriture décimale de u_{10} contient donc bien au moins 1023 neufs.

Solution de l'exercice 60 (Bruno Le Floch) :

Prenons tous les nombres chanceux tels que $\overline{abc} \neq \overline{def}$. Associons-les par paires en associant $\overline{defabc}$ à $\overline{abcdef}$. Lorsque l'on fait la somme des deux nombres formant une paire, on obtient :

$$\left(\overline{abc} + \overline{def}\right) \times 1001$$

Les termes n'appartenant à aucune paire sont de la forme $\overline{abcabc}$, donc divisibles par 1001.

Finalement la somme de tous les nombres chanceux est divisible par 1001, donc par 13.