Olympiade française de mathématiques

Stage olympique de printemps
LA ROCHETTE 2004

Stage olympique de printemps La Rochette, avril 2004

tragicomédie en cinq actes

Avant-propos

Le stage de La Rochette 2004 été organisé par l'Olympiade française de mathématiques, avec le soutien de Thomson.

Son objet a été de rassembler les lauréats de diverses compétitions mathématiques et de les faire travailler sur des exercices en vue de la formation de l'équipe qui représentera la France à l'Olympiade internationale de mathématiques à Athènes en juillet 2004.

Nous tenons à remercier Thomson pour son soutien décisif au stage ; nous remercions aussi le centre international du Rocheton pour son excellent accueil et l'École normale supérieure pour son soutien logistique.

Dramatis personnæ

Acte I

Samedi

Scène 1

Un samedi après-midi avec Jean-Christophe Novelli

Exercice 1

Soit a_1, …, a_n des entiers, avec $n \geqslant 5$. Montrer que l'on peut trouver une sous-famille $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ de $(a_1, \ldots, a_n)$ telle que n^2 divise $\pm a_{i_1} \pm a_{i_2} \pm \cdots \pm a_{i_k}$ pour un choix convenable des signes.

Exercice 2

On considère 20 entiers deux à deux distincts choisis dans $\{1, 2, \ldots, 69\}$. Montrer que parmi leurs différences deux à deux, il y a quatre nombres égaux.

Exercice 3

Un tétramino est une pièce d'un seul tenant formée de quatre carrés unités ayant chacun un côté commun avec au moins un des trois autres (comme les briques à Tetris, quoi). Déterminer le nombre T de tétraminos à rotation près. Est-il possible de paver un rectangle $4 \times T$ en utilisant chaque tétramino une et une seule fois ?

Exercice 4

Dolphi (mais quel farceur !) a caché cinq entiers distincts. Il n'accepte de donner que leurs sommes deux à deux : 17, 20, 28, 14, 42, 36, 28, 39, 25 et 31. Saurez-vous retrouver ces cinq nombres ?

Exercice 5 (Olympiades croates 2001)

Une machine à sous accepte des pièces 1, 10 et 25 kunas. Si l'on insère une pièce de 1 kuna, la machine rend une pièce de 10 kunas. Si l'on insère une pièce de 10 kunas, elle rend une pièce de 1 kuna et une pièce de 25 kunas. Enfin, si l'on insère une pièce de 25 kunas, elle donne deux pièces de 10 kunas.

Initialement, on dispose d'une pièce de 10 kunas. Après un certain nombre de parties, on a en main exactement 100 pièces de 1 kuna, ainsi que d'autres pièces. Quelle est le plus bas montant possible de la fortune ainsi accumulée ?

Exercice 6

Est-il possible de disposer en ligne les nombres 1, 1, 2, 2, …, 1998, 1998 de sorte que pour chaque k, il y ait exactement $k-1$ nombres écrits entre les deux occurrences de k ?

Exercice 7

On prend un paquet de cartes numérotées de 1 à N. Une opération consiste à regarder la valeur k de la carte située sur le dessus du paquet, et d'inverser alors l'ordre des k premières cartes sur la pile. Montrer qu'au bout d'un nombre fini d'opérations, la carte numéro 1 se retrouvera sur le dessus du paquet.

Scène 2

La fièvre du samedi soir

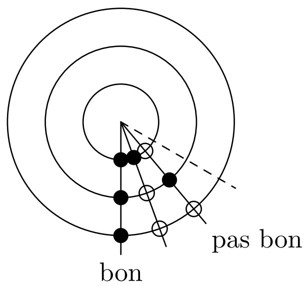
Raisonnables.

Exercice 8 (Problem-Solving Strategies)

Sur une table, on dispose a jetons blancs, b jetons noirs et c jetons rouges. À chaque étape, on choisit deux jetons de couleurs différentes, et on les remplace par un jeton de la troisième couleur. Quels sont les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs pour lesquels on peut arriver par cette méthode à ne laisser qu'un seul jeton sur la table ?

Exercice 9 (Olympiade irlandaise 2001)

D'un point O du plan, on fait partir 20 rayons régulièrement espacés. On dispose de trois cerceaux mobiles de centre O. Chaque cerceau comporte 20 jetons, 10 blancs et 10 noirs, répartis sur les rayons. Pour une position donnée des trois cerceaux, un rayon est dit *bon* si les trois jetons placés dessus sont de même couleur. Montrer que l'on peut trouver une configuration des cerceaux pour laquelle au moins 5 rayons sont bons.



Exercice 10 (OIM 2000)

Un magicien a placé 100 cartes numérotées de 1 à 100 dans trois boîtes, une rouge, une bleue, une blanche, aucune n'étant vide. Un spectateur choisit deux boîtes parmi les trois, puis une carte dans chacune d'entre elles, et annonce la somme des nombres marqués sur les deux cartes. Le magicien est alors capable d'identifier les deux boîtes choisies. Combien de façons le magicien a-t-il de placer les cartes dans les boîtes s'il veut être capable de réaliser ce tour ?

Moins raisonnables.

Exercice 11 (D. Zvonkine)

À l'arrêt du bus, N personnes attendent avec des billets pour des places numérotées de 1 à N. Hélas, la personne possédant le billet numéro 1 est une vieille folle, et lorsque le bus arrive, elle s'installe à une place prise au hasard. Le passager numéro 2 s'installe alors à la place 2 si elle est libre, et à n'importe quelle place libre prise au hasard sinon. Et ainsi de suite pour tous les passagers suivants, dans l'ordre de leur numéro. Quelle est la probabilité pour que la dernière personne se retrouve assise à sa place ?

Exercice 12 (Kvant)

La circonférence d'un cercle de longueur $6k$ a été découpée en $3k$ arcs : k de longueur 1, k de longueur 2 et k de longueur 3. Montrer que quelle que soit la façon dont on a réalisé ce découpage, il existe deux points diamétralement opposés qui sont des extrémités d'arcs.

Exercice 13 (Olympiade iranienne 1999)

Soit $S = \{1, \ldots, n\}$ et $A_1, \ldots, A_k$ des sous-ensembles de S tels que pour tous quadruplets d'entiers $1 \leqslant i_1, i_2, i_3, i_4 \leqslant k$, on ait :

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup A_{i_3} \cup A_{i_4}| \leqslant n - 2$$

Prouver que $k \leqslant 2^{n-2}$.

Scène 3

Corrigés

Exercice 1.

Pour toute partie E de $\{1, \ldots, n\}$, on pose :

$$s(E) = \sum_{i \in E} a_i$$

(on rappelle qu'une somme indexée sur le vide est nulle). Comme il est facile de vérifier par récurrence que $2^n > n^2$ pour $n \geqslant 5$, le principe des tiroirs assure qu'il existe deux parties distinctes E et F telles que $s(E) \equiv s(F) \pmod{n^2}$. Donc n^2 divise $s(E) - s(F)$, ce qui conclut.

Ceux qui seraient gênés par une somme sur la partie vide peuvent s'en dispenser, puisque $2^n - 1$ est aussi strictement supérieur à n^2.

Exercice 2.

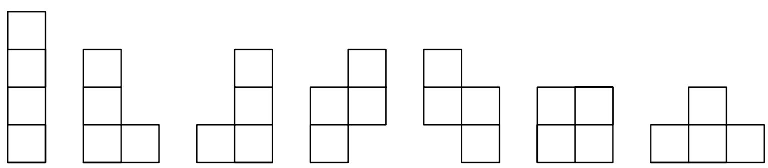
On note $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{20} < 70$ les entiers considérés. L'idée est de regarder les 19 différences $a_{i+1} - a_i$. Si parmi elles, il n'y avait pas plus de trois nombres égaux, alors on aurait :

$$69 \geqslant a_{20} - a_1 = \sum_{i=1}^{19} (a_{i+1} - a_i) \geqslant 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 6 + 6 + 6 + 7 = 70$$

ce qui est absurde.

Exercice 3.

On vérifie à la main que $T = 7$, et les tétraminos sont les pièces suivantes :



Supposons que le pavage soit possible, et colorions alors alternativement les cases du rectangle en blanc et noir, comme sur un damier. Il y a autant de cases blanches que de noires. Or on voit que, parmi les tétraminos ci-dessus, tous sauf le dernier recouvreront autant de cases blanches que de cases noires.

Exercice 4.

Soit $a > b > c > d > e$ les cinq nombres cachés. Dans la liste des sommes deux à deux, ils interviennent chacun 4 fois, d'où, en sommant :

$$a+b+c+d+e = \frac{17+20+28+14+42+36+28+39+25+31}{4} = 70$$

D'autre part, $a+b = 42$ et $d+e = 14$, donc $c = 70-42-14 = 14$. De plus, $a+c$ est la deuxième plus grande somme, donc $a = 39-14 = 25$, et de même $e = 17-14 = 3$. Mais alors $b = 42-25 = 17$ et $d = 14-3 = 11$.

Réciproquement, on vérifie facilement que ces nombres donnent bien les sommes annoncées, et que Dolphi n'est quand même pas *en plus* un menteur.

Exercice 5.

À une certaine position, notons X, Y et Z les nombres de pièces de 1, 10 et 25 kunas que l'on a en main, et x, y, z les nombres de pièces de 1, 10 et 25 kunas que l'on a insérées avant d'arriver à cette position. D'après les règles, chaque fois que l'on a inséré une pièce de 10 kunas, on a récupéré une pièce de 1 kuna, et que bien sûr, chaque fois que l'on a inséré une pièce de 1, on l'a perdue. De plus, insérer une pièce de 25 kunas ne change pas le nombre de pièces de 1 kuna que l'on a en main. Par conséquent, $X = y - x$, et de la même manière, $Z = y - z$, et $Y = 1 + x - y + 2z$. On cherche à minorer la fortune $S = X + 10Y + 25Z$ accumulée en fonction de X.

Intuitivement, il paraît clair que si l'on veut minimiser la fortune accumulée pour un nombre X fixé de pièces de 1 kuna, il convient de ne jamais insérer de pièce de 1 (car pour la recréer, on ne peut qu'augmenter la somme totale), ce qui correspondrait à $x = 0$, et de ne garder à la fin aucune pièce de 25 kunas, puisque l'on diminue à fortune accumulée en les insérant, ce qui correspondrait à $Z = 0$. Cela conduit à exprimer S comme combinaison affine positive de X, x et Z. Or $Y = 1 + X + 2x - 2Z$, donc :

$$S = X + 10(1 + X + 2x - 2Z) + 25Z = 10 + 11X + 20x + 5Z \geqslant 10 + 11X$$

En particulier, pour $X = 100$, on trouve $S \geqslant 1110$, et il est facile de vérifier qu'en appliquant les deux dernières règles 100 fois chacune, on obtient bien cette somme minimale.

Exercice 6.

Solution proposée par Raphaël Beuzart-Plessis. Remplaçons pour voir 1998 par n. Une étude à la main des premières valeurs suggère que la construction n'est pas possible lorsque $n \equiv 2, 3 \pmod 4$.

Supposons la construction possible. On va calculer de deux façons la somme S des écarts séparant les paires de jumeaux. Il est clair d'une part que $S = \sum_{i=1}^{n}(i-1) = n(n-1)/2$.

D'autre part, pour chaque élément de la liste, on compte le nombre d'éléments à sa droite, sauf son jumeau s'il en fait partie. La somme des nombres ainsi calculés pour un entier et son jumeau est donc égale à l'écart qui les sépare, additionné d'un nombre pair. Ainsi, la somme totale S' de tous ces nombres est de même parité que S. Or par construction :

$$S' = \left(\sum_{i=0}^{2n-1} i\right) - n = 2n(n-1)$$

Par conséquent, $4n(n-1) \equiv n(n-1) \pmod 4$, et donc $n \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$.

Comme $1998 \equiv 2 \pmod 4$, la construction demandée est impossible.

Autre solution. Calculons de deux façons la somme R des rangs des termes de la liste. Elle vaut clairement $2n(2n+1)/2$.

D'autre part, si l'on note r_i le rang de la première occurrence de l'entier i dans la liste, le rang de la deuxième occurrence est $r_i + i$. On a donc :

$$R = \sum_{i=1}^{n}(2r_i + i) \equiv \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \pmod 2$$

et on conclut comme précédemment.

Exercice 7.

Première solution. On raisonne par récurrence sur N : c'est immédiat pour $N = 1$. Passons à l'hérédité. Supposons le résultat vrai pour $N-1$.

Si la N-ième carte se retrouve à un moment donné sur le dessus du paquet (remarquons qu'il n'y a qu'un nombre fini $N!$ de paquets, donc si N n'est pas apparu dans les $N!$ premiers termes, il n'apparaît jamais), alors l'opération suivante la fait passer tout au-dessous, et elle ne bougera plus de cette position par la suite car aucune autre carte ne peut l'en déloger. L'hypothèse de récurrence s'applique alors au paquet des $N-1$ autres cartes.

Si maintenant la N-ième carte n'apparaît jamais sur le dessus du paquet, alors en particulier la carte initialement tout au-dessous du paquet ne bougera jamais. Si c'est la carte N, on conclut comme précédemment. Sinon, comme la valeur d'une carte n'a d'influence sur le cours des opérations que pour autant qu'elle apparaisse sur le dessus du paquet, on peut échanger la carte N et la carte au-dessous du paquet, ce qui nous ramène au premier cas. D'où le résultat.

Deuxième solution. Prouver que la carte 1 atteint le dessus du paquet revient à montrer que l'ordre des cartes ne change plus à partir d'une certaine étape. L'idée est donc de faire apparaître un invariant judicieux, par exemple la somme S des 2^k, pour k décrivant l'ensemble des cartes dont la valeur coïncide avec la position dans le paquet. Si à une étape donnée, la carte $k > 1$ est sur le dessus du paquet, l'opération suivante l'amène en position k sans modifier les positions de rang supérieur. Dans la somme S apparaît donc le terme 2^k, et les termes d'exposants supérieurs restent inchangés. Certains termes d'exposants inférieurs peuvent être modifiés, mais comme $2^k > 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1}$, l'opération fera en tout cas augmenter strictement S (ce qui est le comble pour un invariant !).

Comme par ailleurs, S ne prend que des valeurs entières inférieures à $2+4+\cdots+2^N$, la situation précédente ne peut se présenter qu'un nombre fini de fois successives. On finira donc par trouver la carte 1 sur le dessus du paquet.

Exercice 8.

Si les quantités a, b, c initiales de jetons ont même parité, elles la garderont tout au long du jeu, car si x, y, z ont même parité, $x-1$, $y-1$ et $z+1$ aussi. Pour atteindre une position contenant un seul jeton, il est nécessaire que a, b et c n'aient pas même parité. On va voir que cette condition est également suffisante.

En effet, plaçons-nous dans le cas où a, b et c ne sont pas de même parité. Si à une étape donnée, x, y et z jetons des différentes couleurs, avec $x \leqslant y \leqslant z$ et y non nul, on peut toujours jouer, et obtenir $x+1$, $y-1$ et $z-1$ jetons (en particulier, un nombre total de jetons strictement plus petit). Si deux de ces trois nombres sont nuls, ce sont nécessairement $y-1$ et $z-1$. Mais alors $y=z=1$, et la condition de parité assure que l'on avait $x=0$; on a donc atteint une position à un seul jeton. Si à l'inverse il n'y a pas deux nombres nuls parmi les trois, on recommence. Le procédé finira par s'arrêter puisque l'on a de moins en moins de jetons.

Exercice 9.

Considérons le nombre total de bons rayons que l'on peut obtenir dans toutes les positions relatives possibles des cerceaux. Comme on peut faire coïncider chacun des 10 jetons blancs du cerceau extérieur avec chacun des 10 du cerceau central et des 10 du cerceau intérieur, on a 1000 bons rayons blancs possibles, et de même 1000 bons rayons noirs possibles. Mais il y a par ailleurs $400 = 20 \times 20$ dispositions relatives des trois cerceaux, correspondant à faire pivoter de toutes les façons possibles les deux cerceaux intérieurs, le cerceau extérieur restant fixé. Le principe des tiroirs assure alors qu'il existe une position des cerceaux avec 5 bons rayons au moins.

Exercice 10.

Sur un tel exercice, si l'on n'a pas d'idée *qui torche*, il est toujours possible de faire une étude exhaustive à la main. Contrairement aux apparences, ce n'est pas si long et permet de conclure avec les 7 points. Cela dit, il n'est pas interdit de recourir à des méthodes plus subtiles, comme par exemple celle qui suit.

Pour alléger la rédaction, on attribue à chaque nombre la couleur de la boîte dans laquelle il se trouve.

Premier cas : il existe un i tel que i, $i+1$ et $i+2$ sont de couleurs toutes distinctes, disons rouge, blanc et bleu respectivement. Puisque $i+(i+3) = (i+1)+(i+2)$, le nombre $i+3$ n'est ni blanc ni bleu. Il est donc rouge. De la même manière, $(i+1)+(i+4) = (i+2)+(i+3)$, donc $i+4$ est nécessairement blanc. Par une récurrence immédiate, on en déduit que la suite des couleurs des entiers à partir de i est 3-périodique : rouge, blanc, bleu, rouge, blanc, bleu, etc. Le même raisonnement s'adapte pour les entiers inférieurs à i. Il en résulte que la couleur d'un entier est déterminée par son reste modulo 3, et les couleurs distinctes de 1, 2 et 3 fixent celles de tout le paquet. Il y a six façons de choisir ces trois couleurs, et chacun de ces choix conduit bien à une solution.

Deuxième cas : trois nombres consécutifs ne sont jamais tous de couleurs distinctes. Disons alors que 1 est rouge. Soit i le plus petit entier qui n'est pas rouge. On peut le supposer blanc. Soit enfin k le plus petit nombre bleu. Vu l'hypothèse, on a alors $i+1 < k$. Supposons $k < 100$. Puisque $i + k = (i - 1) + (k + 1)$, le nombre $k + 1$ doit être rouge. Par ailleurs, $i + (k + 1) = (i + 1) + k$, et donc $i + 1$ est forcément bleu, ce qui contredit la minimalité de k. Par conséquent $k = 100$. Mais alors $(i - 1) + 100 = i + 99$, donc 99 est blanc.

On va voir qu'en fait, tous les nombres autres que 1 et 100 sont blancs. En effet, si $t > 1$ était rouge, on déduirait de $t + 99 = (t - 1) + 100$ que $t - 1$ est bleu, ce qui est impossible puisque 100 est le seul nombre bleu. Aucun $t > 1$ autre que 100 n'est donc rouge ou bleu.

Réciproquement, si 1 est d'une couleur, 100 d'une autre et toutes les autres cartes de la troisième, il est facile de vérifier que le tour fonctionne. Il reste à attribuer les couleurs, ce qui fournit six possibilités supplémentaires.

Finalement, on a donc douze possibilités en tout.

Exercice 11.

Montrons par récurrence que, comme le suggère l'étude des premiers cas, la probabilité cherchée est $1/2$ pour tout $N \geqslant 2$. C'est évident pour $N = 2$. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $N - 1$.

La vieille folle choisit une place parmi $\{1, \ldots, n\}$ de manière équiprobable. Si elle s'installe à la place 1, tout le monde s'assoit à sa place, en particulier la dernière. Si en revanche, elle prend la place N, la dernière personne n'a aucune chance de se retrouver à sa place (héhé !). Enfin, si la vielle folle s'installe à la place k avec $1 < k < N$, les personnes $2, 3, \ldots, k-1$ s'installent chacune à sa place, et la personne k se place au hasard sur l'un des $N - k$ sièges vides restant. Elle se comporte donc comme une vieille folle (à l'âge près peut-être) dans le groupe des $N-k$ personnes restantes. L'hypothèse de récurrence assure alors que la dernière personne a une probabilité $1/2$ de gagner sa place.

Par disjonction de cas, on conclut que la probabilité que la dernière personne se retrouve à sa place vaut :

$$\frac{1}{n}\left(1 + 0 + (n-2) \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

(et hop !).

Exercice 12.

On va encore raisonner par récurrence. Pour $k = 1$, le résultat est clair. Supposons le résultat établi au rang $k - 1$, et considérons un découpage en $3k$ arcs comme dans l'énoncé. On commence par colorier en bleu les extrémités de tous les arcs. On subdivise ensuite chaque arc de longueur 2 ou 3 en arcs de longueur 1, et l'on colorie en rouge les extrémités ainsi ajoutées. Il y a donc au total $3k$ points bleus et $3k$ points rouges formant les sommets d'un $6k$-gone régulier.

Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il n'y ait pas deux points bleus diamétralement opposés. En face de chaque point bleu se trouve donc un point rouge, et comme il y a autant de points rouges que de points bleus, on a aussi un point bleu en face de chaque point rouge.

Commençons par montrer que parmi les arcs initiaux, on peut trouver un arc de longueur 1 et un arc de longueur 2 adjacents. En effet, il n'y a déjà pas deux arcs de longueur 1 consécutifs, car cela correspondrait à une succession de trois points bleus, diamétralement opposés à trois points rouges successifs, et donc à un arc initial de longueur au moins 4, ce qui n'existe pas. S'il n'y avait pas deux arcs adjacents de longueur 1 et 2, chaque arc de longueur 1 serait encadré par deux arcs de longueur 3. En considérant la suite des longueurs des arcs successifs à partir d'un arc de longueur 2 quelconque, on trouverait au moins $k+1$ arcs de longueur 3, ce qui est un peu trop.

On dispose donc de notre succession d'un arc de longueur 1 et d'un arc de longueur 2. Elle correspond à une configuration de points successifs de couleurs bleue, bleue, rouge et bleue (BBRB), qui fait donc face à une configuration RRBR. Les deux premiers R ainsi obtenus sont nécessairement situés sur un arc de longueur 3, donc la configuration est en fait BRRBR, et elle est en face de RBBRB. On élimine l'arc de longueur 1, l'arc de longueur 2 et l'arc de longueur 3 ainsi construits, et on les remplace par des points bleus. Mais la succession des $3(k-1)$ arcs restants forment une figure dans laquelle deux points bleus ne sont jamais diamétralement opposées, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence. Et ça y est !

Exercice 13.

Une partie T de S est dite 2-recouvrable lorsque T est inclus dans la réunion de deux des parties A_i. Parmi toutes les parties de S qui ne sont pas 2-recouvrables (il en existe bien sûr, puisque S lui-même n'est pas 2-recouvrable), on en choisit une, disons A, de cardinal minimal. On considère les ensembles $A \cap A_1$, $A \cap A_2$, …, $A \cap A_k$. Puisque A n'est pas 2-recouvrable, l'un de ces ensembles, disons X, est tel que $A \setminus X$ ne soit pas non plus dans la liste. Par suite, au plus la moitié des sous-ensembles de A fait partie de la liste, qui ne compte donc pas plus de $2^{|A|-1}$ ensembles.

D'autre part, posons $B = S \setminus A$ et considérons les ensembles $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, …, $B \cap A_k$. On va montrer que si la partie X figure dans cette liste, alors $B \setminus X$ n'y est pas. Supposons le contraire. Il existe i et j tels que $X = B \cap A_i$ et $B \setminus X = B \cap A_j$. La minimalité de A assure qu'il existe A_ℓ et $A_{\ell'}$ tels que $A_\ell \cup A_{\ell'} \supset A \setminus \{m\}$, où m est un élément quelconque de A. Mais alors :

$$|A_i \cup A_j \cup A_\ell \cup A_{\ell'}| \geqslant |(S \setminus A) \cup (A \setminus \{m\})| = n-1$$

ce qui contredit l'hypothèse. Comme précédemment, on en déduit que la liste $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, …, $B \cap A_k$ n'a pas plus de $2^{|B|-1}$ termes.

Puisque tout ensemble A_i est uniquement déterminé par son intersection avec A et $B = S \setminus A$, on en déduit que :

$$k \leqslant 2^{|A|-1} \cdot 2^{|B|-1} = 2^{n-2}$$

Acte II

Dimanche

Scène 1

Réjouissances dominicales : l'éveil

Exercice 14 (Olympiades britanniques 2000)

Les sept nains décident de participer en se divisant en quatre équipes à une compétition. Les équipes ne seront pas de taille égale... De combien de façons peuvent-ils former ces quatre équipes (l'ordre des équipes et l'ordre à l'intérieur des équipes ne compte pas) ?

Même question si Blanche-Neige veut participer elle aussi.

Exercice 15 (Olympiade slovène 2000)

Un congrès rassemble 281 participants provenant de 7 pays différents. Dans chaque groupe de 6 participants, deux au moins ont le même âge. Montrer que l'on peut trouver cinq participants de même âge, du même pays et de même sexe.

Exercice 16 (Tournoi de printemps bulgare 2000)

Une boîte contient 2004 balles blanches. On dispose d'un *énorme* sac de balles vertes et rouges à côté. Les opérations suivantes sont autorisées :

- enlever 2 balles blanches de la boîte et y ajouter une verte,
- enlever 2 balles rouges de la boîte et y ajouter une verte,
- enlever 2 balles vertes de la boîte et y ajouter une blanche et une rouge,
- enlever 1 balle blanche et une verte de la boîte et y ajouter une rouge,
- enlever 1 balle rouge et une verte de la boîte et y ajouter une blanche.

1. Au bout d'un certain nombre d'étapes, il reste trois balles dans la boîte. Montrer qu'au moins l'une des balles est verte.
2. Est-il possible d'obtenir une configuration avec une seule balle ?

Exercice 17 (Mathematical Olympiad Treasures)

Montrer que pour n'importe quel choix de 10 éléments du tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 9 & & & & \\ 9 & 0 & 1 & \cdots & 8 & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

deux d'entre eux n'étant jamais sur la même ligne ni sur la même colonne, il y en a forcément deux égaux.

Scène 2

Réjouissances dominicales : la longue marche

Exercice 18 (OIM 1977)

Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ une famille finie de réels. On suppose que la somme de 7 termes consécutifs quelconques est strictement positive, et la somme de 11 termes consécutifs quelconques est strictement négative. Déterminer la valeur maximale possible de n.

Exercice 19

Sur une grille carrée divisée en 1000×1000 petits carrés, on noircit un certain nombre n de cases. Quelle est valeur maximale de n pour laquelle il n'existe pas de triangle rectangle ayant deux côtés parallèles aux côtés de la grille, et ses sommets en les centres de cases noircies ?

Exercice 20 (Test de sélection américain 2000)

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^{-1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{i}$$

Exercice 21

On se donne $mn+1$ points de l'espace tels que parmi $m+1$ quelconques d'entre eux, on peut toujours en trouver deux à distance 1 l'un de l'autre. Montrer qu'il existe une boule de rayon 1 contenant au moins $n+1$ de ces points.

Exercice 22 (Olympiade britannique 2000)

Trouver un ensemble A de dix entiers positifs tels que la somme de six d'entre eux ne soit jamais divisible par 6. Est-ce possible avec onze entiers ?

Scène 3

Réjouissances dominicales : l'apothéose

Raisonnables.

Exercice 23 (Test de sélection allemand 1983)

Quinze équipes participent à une compétition. Chaque équipe affronte exactement une fois toutes les autres. Pour chaque victoire, une équipe reçoit 3 points, pour chaque match nul, 2 points, et pour chaque défaite, 1 point. Après la fin de la compétition, les équipes ont des scores tous différents, au moins égaux à 21. Montrer que l'équipe gagnante a fait au moins un match nul.

Exercice 24 (Olympiade hongroise 1998)

Soit ABC un triangle acutangle et P un point du côté $[AB]$. Soit B' un point de (AC) et A' un point de (BC) tels que $\widehat{B'PA} = \widehat{A'PB} = \widehat{ACB}$. Les cercles circonscrits à APB' et BPA' se rencontrent en P et M.

Trouver le lieu de M quand P varie le long du segment AB.

Exercice 25 (OIM 2001)

Soit n un entier impair strictement supérieur à 1 et $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des entiers donnés. Pour chacune des $n!$ permutations $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, on pose :

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$$

Montrer qu'il existe deux permutations b et c distinctes, telles que $n!$ divise $S(b) - S(c)$.

Moins raisonnables.

Exercice 26 (Olympiade russe 1986)

L'ensemble $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ est partitionné en trois ensembles à n éléments A, B et C. Est-il toujours possible de choisir un nombre dans chacun de ces ensembles de sorte que l'un d'entre eux soit la somme des deux autres ?

Exercice 27 (Olympiade slovène 1999)

Trois boîtes contiennent chacune au moins un jeton. Une opération consiste à choisir deux boîtes, et à transvaser des jetons de l'une à l'autre de façon à doubler le nombre de jetons dans la boîte d'arrivée. Est-il possible de vider l'une des boîtes en un nombre fini d'opérations ?

Exercice 28 (Olympiade chinoise 1998)

Soit ABC un triangle acutangle tel que $AB > AC$ et $\widehat{ABC} = 45°$. Les centres O et I des cercles circonscrit et inscrit vérifient $\sqrt{2}OI = AB - AC$. Déterminer toutes les valeurs possibles de $\sin \widehat{BAC}$.

Scène 4

Corrigés

Exercice 14.

Solution proposée par Pierre Bertin. Il ne peut pas y avoir d'équipe à 5 participants ou plus. S'il y a une équipe à 4, il y a aussi 3 équipes à 1. Si tel n'est pas le cas, il y a soit des équipes à 3, 2, 1, 1 joueurs ou à 2, 2, 2, 1 joueurs. Comptons le nombre de façons d'obtenir chaque configuration.

- $(4,1,1,1)$. Il y a $\binom{7}{4}$ faç ons de choisir les quatre participants de l'équipe à 4. Les autres joueront seuls. Cela fait donc 35 possibilités.
- $(3,2,1,1)$. Il y a $\binom{7}{3}$ faço ns de choisir l'équipe à 3 puis $\binom{4}{2}$ façons de choisir l'équipe à 2 dans les nains restants. Les deux derniers joueront seuls. Cela fait donc $35 \cdot 6 = 210$ possibilités.
- $(2,2,2,1)$. Il y a $\binom{7}{2}$ façons de choisir l'équ ipe à 2 puis $\binom{5}{2}$ façons de choisir la deuxième équipe à 2 puis $\binom{3}{2}$ de choisir la dernière. Mais comme toutes ces équipes sont interchangeables, il faut diviser le résultat total par $3! = 6$. On trouve donc $21 \cdot 10 \cdot 3/6 = 105$ possibilités.

Au total, on trouve qu'il y a 350 façons de répartir les 7 nains en quatre équipes.

Avec Blanche-Neige, rebelote avec les configurations

- $(5,1,1,1)$, qui compte pour 56 possibilités.
- $(4,2,1,1)$, qui compte pour 420 possibilités.
- $(3,3,1,1)$, qui compte pour 280 possibilités.
- $(3,2,2,1)$, qui compte pour 840 possibilités.
- $(2,2,2,2)$, qui compte pour 105 possibilités.

Au total, on trouve 1701 façons de répartir les 7 nains et BN en quatre équipes.

Solution bis. Si l'on note $n_{p,k}$ le nombre de façons de répartir p personnes en k équipes, on montre facilement la relation $n_{p,k} = n_{p-1,k-1} + k.n_{p-1,k}$. En effet, pour former k équipes à p joueurs, le joueur p peut soit être seul $(n_{p-1,k-1})$, soit s'insérer dans l'une des k équipes existantes $(k.n_{p-1,k})$. Avec cette relation, il est facile de construire de proche en proche (à partir de la gauche) :

k/p	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	3	7	15	31	63	127
3			1	6	25	90	301	966
4				1	10	65	350	1701

Exercice 15.

Solution proposée par Raphaël Beuzart-Plessis. Il y a au plus cinq âges représentés parmi les congressistes : sinon, un groupe de six personnes d'âges distincts contredirait l'hypothèse de l'énoncé.

Par suite, s'il n'existe pas de groupe de cinq personnes de même âge, même nationalité et même sexe, il y a au plus quatre personnes pour chaque choix d'un âge, d'une nationalité et d'un sexe. Il ne peut donc y a avoir plus de $4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 = 280$ participants, ce qui est absurde.

Solution proposée par Sandrine Henri. D'après le principe des tiroirs, au moins 41 participants ont même nationalité. Parmi eux, au moins 21 sont donc de même sexe. Comme ci-dessus, on remarque qu'il n'y a pas plus de cinq âges représentés, et une troisième application du principe des tiroirs montre alors que parmi les 21 personnes précédentes, il y en a bien 5 de même âge, ce qui conclut.

Exercice 16.

Solution proposée par Igor Kortchemski complétée par Raphaël Beuzart-Plessis. C'est un problème typique d'invariant... Si on note x, y, z le nombre de balles blanches, vertes et rouges respectivement, le premier invariant trouvé est que $x-z$ conserve toujours la même parité (très clair si on écrit convenablement les 5 opérations). On en déduit la réponse à la première question puisque le nombre de balles blanches et rouges est pair au début, ce qui impose 0 ou 2 balles de ces couleurs dans une configuration à 3 balles et donc au moins une verte.

En revanche, cet invariant ne permet pas de répondre à la question 2 dans la mesure où les configurations VBB et VRR ne peuvent pas se ramener à une configuration à 1 balle. En revanche, les configurations VRB et VVV peuvent s'y ramener. À partir de cela, comment trouver un meilleur invariant ? Plusieurs pistes : en observant les relations, c'est vraisemblablement une relation linéaire, modulo quelque chose ; les coefficients devant x, y et z sont tous différents au vu des configurations analysées plus haut ; on aurait bien envie de réutiliser $x-z$, d'abord parce que c'était le premier invariant et aussi parce qu'il se passe quelque chose de spécial dans les configurations où $x = z$; comme le premier invariant était modulo 2, on va chercher dans ses multiples. Tout ceci amène à chercher un invariant de la forme $a(x-z)+by$ modulo 2 puis modulo 4. Un peu de nez, de chance et de réussite permet alors de trouver $x+2y-z$ modulo 4... Cet invariant vaut 0 au début du jeu et il ne peut pas être nul avec une seule balle, ce qui permet d'affirmer qu'on n'arrivera jamais à une configuration à une seule balle.

Exercice 17.

Solution proposée par Pierre Bertin. C'est un exercice typique de quantité à évaluer de deux manières différentes en faisant la démonstration par l'absurde. Quelle quantité ? La plus simple est la somme des éléments sélectionnés.

Clairement, si l'on raisonne par l'absurde, la somme des 10 éléments vaut 45.

Pour le deuxième comptage, si on note $m(i,j)$ l'élément dans la ligne i colonne j, on a $m(i,j) \equiv j-i[10]$. En particulier, la somme de ceux-ci est égale (modulo 10) à la somme des entiers de 1 à 10 moins elle-même. Elle est donc, sans calcul, égale à 0 modulo 10, ce qui n'est pas le cas de 45, ce qui établit la contradiction.

Exercice 18.

Solution proposée par Antony Lee. Première observation : $n < 77$ car il suffit d'écrire les nombres à la file dans un tableau $7 * 11$ pour conclure que la somme par ligne est strictement positive et la somme par colonne strictement négative. En poussant un peu cette idée, on trouve l'écriture qui améliore largement le majorant :

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & x_7 & > & 0 \\ x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_8 & > & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ x_{11} & + & x_{12} & + & \cdots & + & x_{17} & > & 0 \end{array}$$

De même qu'avant, la somme de tous les éléments est à la fois strictement positive est strictement négative, ce qui montre que $n < 17$. Il est *raisonnable* de croire à l'optimalité de cette majoration et donc de chercher une configuration à 16.

Le principe du *réverbère* amène à chercher une solution comportant le minimum de valeurs différentes, typiquement deux : une négative et une positive. Notons-les a et b. Avec ces deux valeurs, on va les placer de sorte que toutes les 7-sommes correspondent à une seule inéquation et toutes les 11-sommes à une seule autre inéquation. Remarque : le terme x_i étant forcément égal à x_{i+7} et à x_{i+11}, on trouve facilement ($x_{11} = x_4 = x_{15} = x_8 = x_1 = x_{12} = x_5 = x_{16} = x_9 = x_2 = x_{13} = x_6$ et $x_{10} = x_3 = x_{14} = x_7$) :

$$a\ a\ b\ a\ a\ a\ b\ a\ a\ b\ a\ a\ a\ b\ a\ a$$

Restent les deux équations $5a + 2b > 0$ et $8a + 3b < 0$. On trouve facilement que b est positif et que $3/8 < -a/b < 2/5$. C'est le cas, par exemple de $(3+2)/(8+5) = 5/13$. Donc $a = -5$ et $b = 13$ conviennent.

Solution de Johan Yebbou. Plutôt que de regarder les x_i eux-mêmes, dans la mesure où on regarde les sommes partielles, on introduit les $s_i = \sum_{j=1}^{i} x_i$. Les relations du texte s'écrivent alors $s_i < s_{i+7}$ et $s_i < s_{i-11}$.

En partant de s_1, on va alors chercher les relations qu'ils impliquent. On trouve

$$s_1 < s_8 < s_{15} < s_4 < s_{11} < 0 < s_7 < s_{14} < s_3 < s_{10} < s_{17}$$
$$< s_6 < s_{13} < s_2 < s_9 < s_{16} < s_5 < s_{12} < s_1$$

Donc si $n \geqslant 17$, on n'a aucune solution puisqu'on aurait $s_1 < s_1$. Maintenant, avec $n = 16$, il existe une solution : il suffit de choisir arbitrairement des s_i vérifiant

$$s_6 < s_{13} < s_2 < s_9 < s_{16} < s_5 < s_{12} < s_1 < s_8$$

$$< s_{15} < s_4 < s_{11} < 0 < s_7 < s_{14} < s_3 < s_{10}$$

et de calculer les x_i par $x_i = s_i - s_{i-1}$.

Si on prend pour eux les entiers consécutifs, on retrouve la première solution.

Exercice 19.

Toutes les solutions ont commencé par montrer qu'il existait une solution à 1998 cases noires, avec tous les éléments d'une ligne et d'une colonne, sauf leur intersection.

Solution proposée par Pierre Bertin. La méthode utilisée est le double comptage. On va compter les cases blanches qui ont exactement une case noire, soit sur leur ligne, soit sur leur colonne. De manière évidente, le nombre de telles cases est inférieur ou égal à 1000^2 moins le nombre n de cases noires.

Comptons-le maintenant autrement. Pour chaque case noire, on compte le nombre de cases blanches de sa ligne (et de sa colonne) si celle-ci ne comporte pas d'autre case noire. S'il n'y a pas de triangle rectangle dans la figure, on compte au moins 999 cases puisqu'au moins sa ligne ou sa colonne ne contient pas d'autres cases noires. On a compté au mieux deux fois chaque case blanche, ce qui montre que le nombre de cases blanches est au moins $n \cdot 999/2$.

Donc $999n/2 \geqslant 1000^2 - n$, ce qui s'écrit aussi $n \geqslant 1999 - 999/1001$. La valeur maximale de n est donc 1998.

Solution proposée par Antony Lee. On va montrer que pour un rectangle $p \times q$, on a au plus $p + q - 2$ cases noires. On le fait par récurrence sur la somme $p + q$. Le résultat est vrai dès que $p > 1$ et $q > 1$. Si on a $p + q - 1$ cases noires sans triangle rectangle, il y a au moins une ligne qui contient deux cases noires. On enlève cette ligne ainsi que les colonnes ayant une case noire sur cette ligne. On a donc enlevé k cases noires et $k + 1$ lignes et colonnes. Dans tous les cas, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

Solution proposée par Igor Kortchemski. Même méthode que celle d'Antony où on fait directement la récurrence sur un carré $p \times p$ en retirant deux lignes comme précédemment puis deux colonnes idem.

Exercice 20.

Solution proposée par Igor Kortchemski et Raphaël Beuzart-Plessis. Notons S_n la valeur de la quantité cherchée. En observant l'égalité, on remarque que le second membre est plus simple que le premier car n n'apparaît pas dans la somme. Ceci incite à faire une démonstration par récurrence. On a :

$$\sum_{i=1}^{n+2} \frac{2^i}{i} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{i} + \frac{2^{n+2}}{n+2}$$

On en déduit une formule vérifiée par S_n :

$$\frac{2^{n+2}}{n+2} S_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1} S_n + \frac{2^{n+2}}{n+2}$$

soit encore :

$$2(n+1)S_{n+1} = (n+2)S_n + 2(n+1)$$

Reste à vérifier que c'est aussi le cas pour le premier membre et que l'égalité est vérifiée pour $n = 1$ (trivial). On calcule $2(n+1)S_{n+1} - (n+2)S_n - 2(n+1)$.

$$2(n+1)S_{n+1}-(n+2)S_n-2(n+1) = (2n+2)\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}^{-1}-(n+2)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^{-1}-(2n+2)$$

$$= (2n+2)+\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2(i)!(n+1-i)!}{n!}-(n+2)\frac{i!(n-i)!}{n!}\right)-(2n+2)$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\frac{i!(n-i)!}{n!}(n-2i) = \sum_{i'=0}^{n}\frac{(n-i')!i'!}{n!}(2i'-n)$$

Cette somme est égale à son opposée et est donc nulle.

Autre solution. Une fois trouvée la récurrence, on part de S_{n+1} et on fait apparaître S_n.

$$2(n+1)S_{n+1} = (2n+2)\sum_{i=0}^{n+1}\frac{i!(n+1-i)!}{(n+1)!} = (2n+2)\sum_{i=0}^{n}\frac{i!(n+1-i)!}{(n+1)!}+2n+2$$

$$= 2\sum_{i=0}^{n}\left((n+1)\frac{i!(n-i)!}{n!}-i\frac{i!(n-i)!}{n!}\right)+2n+2$$

$$= 2(n+1)S_n-2(n+1)\sum_{i=0}^{n}\frac{(i+1)!(n-i)!}{(n+1)!}+2S_n+2n+2$$

$$= 2(n+2)S_n-2(n+1)(S_{n+1}-1)+2n+2 = 2(n+2)S_n-(2n+2)S_{n+1}+4n+4$$

L'égalité entre le premier et le dernier membre donne la récurrence cherchée.

Exercice 21.

Solution proposée par Antony Lee. Démonstration par l'absurde : chaque boule contient au plus n points. On choisit un point M_1. Il y a au plus $n-1$ autres points dans la boule centrée en M_1. Il existe donc au moins un point M_2 en dehors de celle-ci. On construit de même les points M_3, … jusque M_m. L'ensemble des boules centrées en les M_i contient au plus mn points. Comme on en a $mn+1$, il en reste au moins un à l'extérieur de ceux-ci. Appelons-le M_{m+1}.

Pour conclure, il suffit de remarquer que l'ensemble $M_1, \ldots, M_{m+1}$ contredit l'hypothèse de l'énoncé.

Exercice 22.

La première question est facile. Par exemple, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1. Si on les veut tous différents, il suffit de prendre 0, 6, 12, 18, 24, 1, 7, 13, 19 et 25.

Début de solution proposé par Raphaël Beuzart-Plessis. La première partie du raisonnement consistait à montrer que les onze éléments sont tous dans trois classes d'équivalence (au plus) modulo 6. Ensuite, on traite les différents cas un par un.

Solution usuelle. Méthode standard : quand on doit montrer qu'un nombre est congru à 0 modulo 6, on montre qu'il est pair et congru à 0 modulo 3. Autrement dit, on va commencer par résoudre le même problème avec 2 puis 3 à la place de 6.

Lemme 1 : parmi trois nombres, on peut toujours en sélectionner deux dont la somme est paire.

Lemme 2 : parmi cinq nombres, on peut toujours en sélectionner trois dont la somme est multiple de 3. Dans ce lemme, la (petite) difficulté est dans l'énoncé : en effet, il faut deviner la valeur 5...

Reste maintenant à utiliser ces deux lemmes conjointement pour déduire le résultat. On veut faire des paquets de 6 entiers et $6 = 2 \cdot 3$. Donc on va faire 2 paquets de 3 entiers. Pour que la somme de ces entiers soit multiple de 6, le plus simple est que la somme de chaque paquet de 3 soit multiple de 3. Pour trouver deux paquets dont la somme est paire, il faut disposer de 3 paquets (lemme 1). Autrement dit, on aura une solution si on sait trouver 3 paquets de 3 entiers dont les sommes sont multiples de 3. On prend les 5 premiers entiers. Parmi eux, on construit le premier paquet de 3. Les deux entiers restants sont associés aux trois suivants pour former un paquet dont on extrait le deuxième paquet de 3 de somme $0[3]$. Il reste maintenant 5 entiers non encore choisis desquels on extrait le dernier paquet de 3.

Exercice 23.

Ordonnons les équipes $E_1, \ldots, E_{15}$ dans l'ordre croissant de leurs scores $e_1 < e_2 < \cdots < e_{15}$. Puisque $e_1 \geqslant 21$ et que les e_i sont tous des entiers, il en résulte que $e_i \geqslant 20 + i$ pour tout i. Par suite, $e_1 + \cdots + e_{15} \geqslant 420$.

Puisque chaque match compte pour 4 points et qu'il y a $15 \cdot 14/2$ matchs, on en déduit que $e_1 + \cdots + e_{15} = 4 \cdot 15 \cdot 14/2 = 420$, et l'on est donc dans le cas d'égalité de toutes les inégalités précédentes, c'est-à-dire $e_i = 20 + i$ pour tout i. En particulier, $e_{15} = 35$.

On note v, d, n les nombres respectifs de victoires, de défaites et de matchs nuls de l'équipe gagnante E_{15}. Alors $v + d + n = 14$, et $3v + d + 2n = e_{15} = 35$. Si l'on avait $n = 0$, il viendrait $v + d = 14$ et $3v + d = 35$, d'où $v = 21/2$, ce qui est absurde. Par suite, $n \geqslant 1$, ce qui conclut.

Exercice 24.

Soit O le point de la médiatrice de $[AB]$ situé du côté opposé à C par rapport à (AB) et tel que $\widehat{AOB} = 2\widehat{C}$. Soit ω le cercle de centre O passant par A. On va montrer que le lieu des points M est alors le petit arc $\overset{\frown}{AB}$ sur ω.

En effet, comme $AB'MP$ et $PMBA'$ sont tous deux inscriptibles, on a les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{B'MP} &= 180^\circ - \widehat{PAB'} = 180^\circ - \widehat{BAC} \\
\widehat{PMA'} &= 180^\circ - \widehat{A'BP} = 180^\circ - \widehat{CBA} \\
\widehat{B'MA} &= \widehat{B'PA} \\
\widehat{BMA'} &= \widehat{BPA'}
\end{aligned}$$

En additionnant les deux premières et en leur retranchant les deux autres, il en résulte :

$$\begin{aligned}
\widehat{AMB} &= 360^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{CBA} - 2\widehat{ACB} \\
&= 180^\circ - \widehat{ACB}
\end{aligned}$$

ce qui revient bien à dire que M appartient à ω. Réciproquement, en examinant les positions limites de M quand P s'approche de A et B, on obtient bien tout l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Exercice 25.

Soit Σ la somme des nombres $S(a)$ quand a décrit l'ensemble des $n!$ permutations de $\{1,\ldots,n\}$. Évaluons Σ modulo $n!$ de deux façons différentes.

D'une part, dans Σ, l'entier k_1 est multiplié par chaque $i \in \{1,\ldots,n\}$ exactement $(n-1)!$ fois. Le coefficient de k_1 dans Σ est donc $(n-1)!(1+2+\cdots+n) = (n+1)!/2$. Il en est de même pour $k_2,\ldots,k_n$, donc :

$$\Sigma = \frac{(n+1)!}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i$$

D'autre part, si $n!$ ne divise aucune des différences $S(b)-S(c)$ pour b,c permutations distinctes de $\{1,\ldots,n\}$, alors les nombres $S(a)$ ont tous des restes différents modulo $n!$. Comme il y a $n!$ permutations, ces restes sont donc exactement tous les entiers $0,1,\ldots,n!-1$. Ainsi :

$$\Sigma \equiv \frac{(n!-1)n!}{2} \pmod{n!}$$

Des deux évaluations précédentes, on déduit, puisque $n>1$, que :

$$\frac{(n+1)!}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i \equiv -\frac{n!}{2} \pmod{n!}$$

Or, comme n est impair, le membre de gauche de cette congruence est 0 modulo $n!$ alors que le membre de droite ne l'est pas, ce qui est la contradiction recherchée.

Exercice 26.

On dira que le triplet $(a,b,c) \in A\times B\times C$ est bon lorsque l'un des nombres est la somme des deux autres. Sans perte de généralité, on peut supposer que $1 \in A$, et que le plus petit nombre k qui n'est pas dans A appartient à B.

Supposons qu'il n'existe pas de bon triplet. On va montrer que pour tout $x \in C$, on a $x-1 \in A$.

En effet, supposons le contraire. Soit $x \in C$ tel que $x-1 \notin A$. Alors $x-1$ n'appartient pas non plus à B, sans quoi $(1, x-1, x)$ serait bon. Donc $x-1$ est dans C, et il est en particulier strictement plus grand que k. Montrons qu'alors $x-k$ et $x-k-1$ sont tous les deux dans C : comme aucun des deux triplets $(x-k, k, x)$, $(k-1, x-k, x-1)$ ne peut être bon, $x-k$ n'est ni dans A ni dans B. De même pour $x-k-1$ en considérant les triplets $(x-k-1, k, x-1)$ et $(1, x-k-1, x-k)$. En répétant ce raisonnement, il vient facilement que pour $i \geqslant 0$, les nombres $x-ik$ et $x-ik-1$, tant qu'ils sont strictement positifs, sont dans C. Mais l'un des $x-ik$ pour i bien choisi est nécessairement inférieur ou égal à k, et il est donc dans A ou B, ce qui est absurde.

Mais alors, si $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$, A contient les nombres $c_1 - 1, \ldots, c_n - 1$ qui sont tous strictement supérieurs à 1 car $2 \notin C$. Avec 1, cela fait donc au moins $n+1$ éléments distincts dans A, ce qui est la contradiction recherchée.

Exercice 27.

Appelons A, B et C les trois boîtes. Elles contiennent respectivement a, b et c jetons. Sans perte de généralité, on peut supposer que $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. On pose $b = aq + r$ avec $0 \leqslant r < a$ et $q \geqslant 1$ la division euclidienne de b par a. Soit $q = m_0 + 2m_1 + \cdots + 2^k m_k$ l'écriture de q en base 2 (avec donc $m_k = 1$ et $m_i \in \{0, 1\}$ pour tout i).

Comme $c \geqslant b$, il y a au moins $2^k a$ jetons dans la boîte C. On double alors k fois de suite le nombre de jetons dans A par les transvasements suivants : à l'étape i, si $m_i = 1$ on prend les $2^i a$ jetons dans B, et si $m_i = 0$, on les prend dans C. Il y en aura bien suffisamment dans C car $2^k \geqslant 1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}$.

À l'issue de ces opérations, on se retrouve avec $2^{k+1} a$ jetons dans A, r jetons dans B et le reste dans C. En particulier, la boîte qui contient le moins de jetons en contient strictement moins que a. En répétant la procédure précédente, on finira par obtenir une boîte vide.

Exercice 28.

Méthode calculatoire peu subtile. Posons comme d'habitude $a = BC$, $b = CA$, $c = CA$, $\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{ABC}$, $\gamma = \widehat{BCA}$. On note de plus r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit à ABC. D'après la loi des sinus dans ABC, on a :

$$a = 2R \sin \alpha \quad b = 2R \sin \beta \quad c = 2R \sin \gamma$$

Puisque $\beta = 45°$, on a $\sin \beta = \sqrt{2}/2$ et $\tan(\beta/2) = \sqrt{2} - 1$. De plus :

$$\sin \gamma = \sin(135° - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

On a donc :

$$r = \frac{c + a - b}{2} \tan(\beta/2) = R(\sqrt{2} - 1)(\sin \alpha + \sin \gamma - \sin \beta)$$

D'après la formule d'Euler $OI^2 = R(R - 2r)$, on a :

$$OI^2 = R^2\big(1 - 2(\sin \alpha + \sin \gamma - \sin \beta)(\sqrt{2} - 1)\big)$$

Et comme $\sqrt{2}OI = AB - AC$, on a :

$$OI^2 = (c-b)^2/2 = 2R^2(\sin\gamma - \sin\beta)^2$$

On déduit que :

$$2(\sin\gamma - \sin\beta)^2 = 1 - 2(\sin\alpha + \sin\gamma - \sin\beta)(\sqrt{2}-1)$$

d'où en développant, et compte tenu de $\sin\beta = \sqrt{2}/2$:

$$1 - 2\sin^2\gamma + 2\sqrt{2}\sin\gamma - 1 = 2(\sin\alpha + \sin\gamma)(\sqrt{2}-1) - 2 + \sqrt{2}$$

En remplaçant $\sin\gamma$ par son expression ci-dessus, il vient, après quelques calculs sans génie :

$$2\sin\alpha\cos\alpha - (2-\sqrt{2})\sin\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{2} - 1 = 0$$

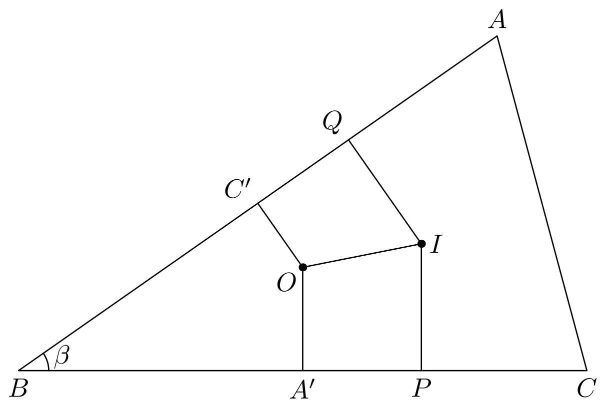
ce qui se factorise en :

$$(\sqrt{2}\sin\alpha - 1)(\sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2} + 1) = 0$$

c'est-à-dire $\sin\alpha = \sqrt{2}/2$ ou bien $\cos\alpha = 1 - \sqrt{2}/2$ qui correspond à :

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$$

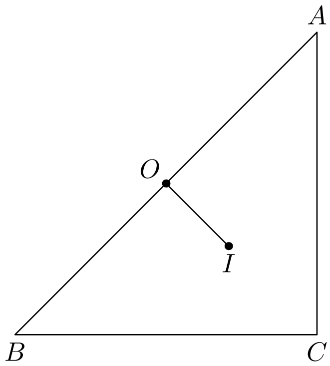
Méthode plus géométrique.



Essayons d'interpréter géométriquement la relation $AB - AC = \sqrt{2}OI$. Le $AB - AC$ apparaît dans un triangle grâce aux points de contact du cercle inscrit et le milieu A' de $[BC]$. En effet, on a la relation classique $A'P = A'C - PC = a/2 - (p-c) = (AB - AC)/2$.

La projection orthogonale de O sur $[BC]$ est A'. Donc l'hypothèse est équivalente à $\frac{A'P}{OI} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit que l'angle des droies (OI) et (BC) est de $\pm 45°$. Comme l'angle en B vaut $45°$, cela signifique que (OI) est ou bien parallèle à (AB), ou bien perpendiculaire.

– Dans le cas d'orthogonalité, (OI) est la médiatrice de $[AB]$, donc I se projette sur le milieu de $[AB]$.



Il en résulte que le triangle est isocèle (et rectangle). Et réciproquement, le triangle isocèle rectange vérifie bien les conditions énoncées.

- Cas parallèle. On projette orthogonalement O et I sur le côté $[AB]$. Le point O va sur C' et I sur Q, et $OIQC'$ est alors un rectangle. Une condition nécessaire et suffisante est donc :

$$OC' = IQ \quad \text{c'est-à-dire} \quad r = R\cos\gamma$$

En utilisant la formule $R + r = R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$, on en déduit que $\cos\alpha + \cos\beta = 1$, ce qui fournit l'expression du sinus :

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\sqrt{2} - 2}}{2}$$

Et comme les relations successives qu'on a énoncées sont équivalentes entre elles, l'angle ainsi défini fournit bien une solution au problème.

Acte III

Lundi

Scène 1

Au soleil

Exercice 29 (Olympiade hongroise 1998)

Les points de contact du cercle inscrit dans un triangle ABC avec les côtés sont notés A', B', C'. Le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ du cercle circonscrit ne contenant pas C est noté C'' et les points A'' et B'' sont définis de façon analogue. Montrer que $(A'A'')$, $(B'B'')$ et $(C'C'')$ sont concourantes.

Scène 2

Sous la pluie

Exercice 30

Extérieurement à un triangle ABC, on construit des triangles BCA', CAB' et ABC' isocèles en A', B', C' et semblables entre eux. Montrer que les droites AA', BB', CC' sont concourantes.

Exercice 31

Soit ABC un triangle. Un cercle coupe le côté BC (respectivement CA, AB) en E et E' (resp. F et F', G et G'). Montrer que les droites AE, BF, CG sont concourantes si et seulement si AE', BF', CG' sont concourantes.

Exercice 32 (Révision)

1. Soit ABC triangle équilatéral et P un point du cercle circonscrit à ABC de l'autre côté que A par rapport à BC. Montrer qu'alors $PA = PB + PC$.
2. Écrire la formule reliant PA, PB et PC et les côtés si le triangle est seulement isocèle en A.
3. On part d'un pentagone régulier qu'on note inscrit dans un cercle et P sur l'arc BC. Montrer que $PA + PD = PB + PC + PE$.

Exercice 33 (Olympiade indienne 1998)

Dans un triangle ABC, soit (AK), (BL), (CM) les hauteurs et H l'orthocentre. Soit P le milieu de $[AH]$. Si (BH) et (MK) se rencontrent en S et si (LP) et (AM) se rencontrent en T, montrer que (TS) est perpendiculaire à (BC).

Exercice 34 (Olympiade hongroise 1998)

Soit ABC un triangle et P, Q deux points du côté $[BC]$ tels que les rayons des cercles inscrits des triangles ABP et ACQ soient égaux. Montrer que les rayons des cercles inscrits des triangles ABQ et ACP sont égaux.

Exercice 35 (Classique)

Quatre droites du plan en position générale définissent quatre triangles. Montrer que les quatre cercles circonscrits sont concourants en un point qu'on appellera point associé aux quatre droites. Montrer que les quatre orthocentres sont alignés.

Exercice 36 (Liste courte 1995)

Dans le plan, soient A, B, C trois points non alignés. Montrer qu'il existe un unique point M du plan tel que

$$MA^2 + MB^2 - AB^2 = MB^2 + MC^2 - BC^2 = MC^2 + MA^2 - CA^2$$

Scène 3

De minuit à midi

Raisonnables.

Exercice 37 (Olympiade pacifico-asiatique 2004)

Déterminer toutes les parties E non vides de $\mathbb{N}^*$ telles que pour tous a et b dans E, le nombre $(a+b)/\text{PGCD}(a,b)$ est aussi dans E.

Exercice 38

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 80°$. Soit E un point du segment $[AB]$ et D un point du segment $[AC]$ tels que $\widehat{EBD} = 20°$ et $\widehat{ECD} = 30°$. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AED}$.

Exercice 39

Soit ABC un triangle non isocèle. Montrer que les tangentes en A, B, C au cercle circonscrit coupent les côtés opposés en trois points alignés.

Moins raisonnables.

Exercice 40 (Liste courte OIM)

Soit $r_1, \ldots, r_n \geqslant 1$ des réels. Prouver que :

$$\frac{1}{r_1+1} + \frac{1}{r_2+1} + \cdots + \frac{1}{r_n+1} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots r_n}+1}$$

Exercice 41 (Olympiade pacifico-asiatique 2004)

Soit S un ensemble de 2004 points du plan, trois d'entre eux jamais alignés. Soit L l'ensemble des droites déterminées par les paires de points de S. Montrer qu'on peut colorier les points de S à l'aide d'au plus 2 couleurs, de sorte que pour tous points A et B distincts dans S, la condition suivante est vérifiée :

> Les points A et B sont de la même couleur si et seulement si le nombre de droites de L qui les séparent est impair.

(On dit qu'une droite sépare deux points s'ils sont situés de part et d'autre de cette droite strictement).

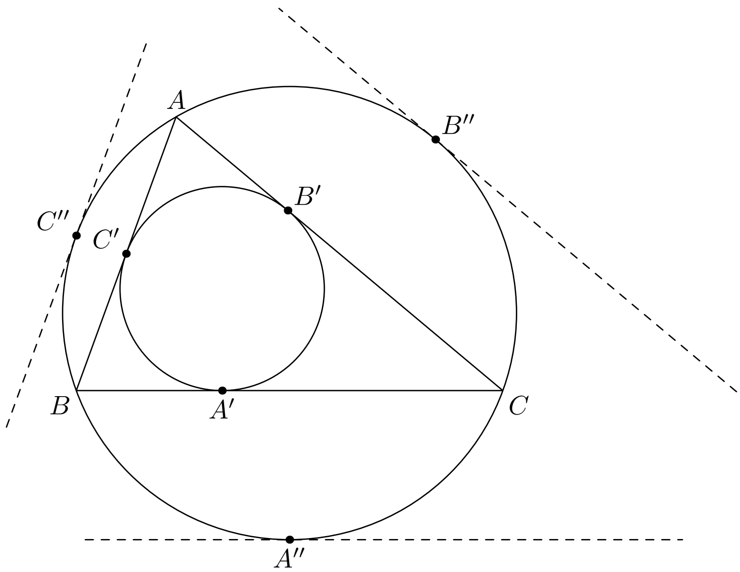
Exercice 42

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et P un point intérieur. Montrer que l'un des angles $\widehat{PAB}$, $\widehat{PBC}$, $\widehat{PCD}$ et $\widehat{PDA}$ ne dépasse pas $\pi/4$.

Scène 4

Corrigés

Exercice 29.



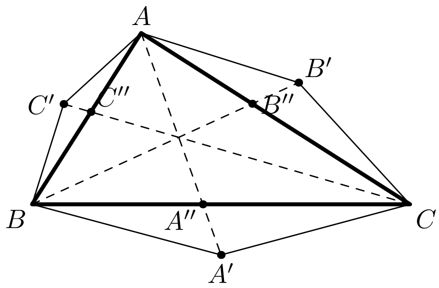
Première solution. Le point A'', puisqu'il est le milieu de l'arc (BC) est sur la médiatrice de $[BC]$, donc la tangente en A'' au cercle circonscrit est parallèle à (BC). Comme on a la même propriété pour B'' et C'', le triangle formé par les tangentes en ces trois points a ses côtés parallèles à ABC. Il est donc homothétique de ABC, et les points A'', B'', C'', qui sont les points de contact du cercle inscrit à ce nouveau triangle, sont par conséquent les images respectives de A', B' et C', ce qui conclut.

Solution proposée par Carlo Defranchis. (IA'') est la médiatrice de (BC), et si l'on appelle K_1 le point d'intersection de $(A'A'')$ et (OI), le théorème de Thalès donne :

$$K_1I/K_1O = IA'/OA'' = r/R$$

et on a le résultat analogue pour les points d'intersection K_2 et K_3 de (OI) avec $(B'B'')$ et $(C'C'')$ respectivement. Comme les trois points K_1, K_2 et K_3 sont en dehors de $[OI]$ par construction, ils sont donc nécessairement confondus, et ainsi les trois droites sont concourantes.

Exercice 30.



Solution proposée par Julien Delaporte. On note A'', B'', C'' les intersections de (AA'), (BB'), (CC') avec (BC), (CA), (AB) respectivement. Soit de plus α, β, γ les angles du triangles, et $\theta = \widehat{C'AB}$. On a, en notant entre crochets les aires de triangles :

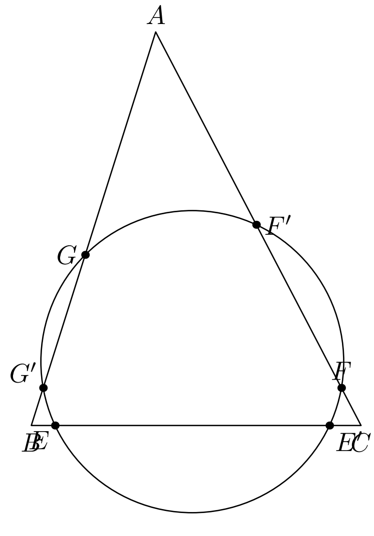
$$\frac{A''B}{A''C} = \frac{[ABA']}{[ACA']} = \frac{AB \cdot A'B \cdot \sin(\beta+\theta)}{AC \cdot A'C \cdot \sin(\gamma+\theta)} = \frac{c\sin(\beta+\theta)}{b\sin(\gamma+\theta)}$$

En écrivant les égalités correspondantes en permutant circulairement A, B et C, il vient :

$$\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{C''A}{C''B} = 1$$

ce qui signifie bien, d'après le théorème de Ceva, que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes.

Exercice 31.



Solution proposée par Igor Kortchemski. Posons :

$$p = \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{GA}{GB} \quad \text{et} \quad p' = \frac{E'B}{E'C} \cdot \frac{F'C}{F'A} \cdot \frac{G'A}{G'B}$$

En considérant les puissances de A, B et C par rapport au cercle, il vient $AF \cdot AF' = AG \cdot AG'$, $BG \cdot BG' = BE \cdot BE'$ et $CE \cdot CE' = CF \cdot CF'$. Le produit de ces trois relations donne $pp' = 1$, donc $p = 1$ si et seulement si $p' = 1$. D'après le théorème de Ceva, c'est ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 32.

1. Le théorème de Ptolémée appliqué au quadrilatère cyclique $ABPC$ montre que l'on a $PA \cdot BC = PB \cdot CA + PC \cdot AB$, ce qui conclut, puisque $AB = BC = CA$.
2. $PA \cdot BC = (PB + PC) \cdot AB$.
3. *Solution proposée par Pierre Bertin.* On applique Ptolémée avec $PA \cdot BC$ puis avec $PD \cdot BC$ et enfin avec $PE \cdot BC$. On utilise les trois équations de façon à trouver $PA + PB - PE$ et on simplifie le membre restant pour obtenir $PC + PD$.

Exercice 33.

Beaucoup des angles de la figure se calculent à partir des angles α, β, γ en A, B et C, ou de leurs complémentaires.

Il suffit pour conclure de montrer que (TS) avec (HL) est égal à celui de (AH) avec (HL). Or, on le connait : $\widehat{AHL} = \gamma$. De plus, $\widehat{LHG} = \alpha$. En utilisant le triangle orthique, on a aussi $\widehat{TML} = \gamma$. Donc le résultat est équivalent à la cocyclicité de $TLSM$. Reste à trouver l'angle que fait (TL) ou (PL) avec le reste de la figure.

Comme P est le milieu de $[AH]$, on peut, au choix, dire que
- c'est le centre du cercle circonscrit à $ALHM$,
- PAL est isocèle,
- PHL est isocèle,
- P appartient au cercle d'Euler, donc en particulier que $PMKL$ sont cocycliques.

Dans tous les cas, cela fixe l'orientation de la droite PL par rapport au reste. Par exemple, comme PAL est isocèle, on a $\widehat{PAL} = \widehat{ALP} = \gamma' = \pi/2 - \gamma$. On en déduit l'angle $\widehat{LTA}$. On le retrouve aussi en $\widehat{MSL}$: en effet, $\widehat{MSL} = \widehat{MBS} + \widehat{BMS} = \alpha'$.

Plus élégamment, on peut voir que le triangle ATL est semblable à KSB (deux angles égaux).

Exercice 34.

Pour résoudre cet exercice, on commence par donner une expression du rayon r du cercle inscrit à un triangle AXY en fonction de sa hauteur h issue de A, et des angles $\theta = \widehat{AXY}$ et $\varphi = \widehat{AYX}$.

Soit K le pied de la hauteur issue de A dans AXY. On a :

$$XY = XK + KY = h(\operatorname{cotan} \theta + \operatorname{cotan} \varphi) = r(\operatorname{cotan}(\theta/2) + \operatorname{cotan}(\varphi/2))$$

donc :

$$\begin{aligned}
\frac{r}{h} &= \frac{\operatorname{cotan}\theta + \operatorname{cotan}\varphi}{\operatorname{cotan}(\theta/2) + \operatorname{cotan}(\varphi/2)} \\
&= \frac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin\theta\sin\varphi} : \frac{\sin(\theta+\varphi)/2}{\sin(\theta/2)\sin(\varphi/2)} \\
&= \frac{\cos(\theta+\varphi)/2}{2\cos(\theta/2)\cos(\varphi/2)} \\
&= \frac{\cos(\theta/2)\cos(\varphi/2) - \sin(\theta/2)\sin(\varphi/2)}{2\cos(\theta/2)\cos(\varphi/2)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\varphi}{2}
\end{aligned}$$

Revenons alors à l'exercice initial. On note $\beta = \widehat{ABP}$, $\gamma = \widehat{ACQ}$, $\delta = \widehat{BPA}$, $\varepsilon = \widehat{AQC}$, $\delta' = \widehat{APC}$ et $\varepsilon' = \widehat{AQB}$. On note r_1, r_2, r_3, r_4 les rayons des cercles inscrits aux triangles ABP, ACQ, ABQ, ACP. La relation $r_1 = r_2$ équivaut alors à :

$$\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\delta}{2} = \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\varepsilon}{2}$$

La relation $r_3 = r_4$ équivaut alors à :

$$\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\varepsilon'}{2} = \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\delta'}{2}$$

En remarquant que $\tan(\delta/2) = 1/\tan(\delta'/2)$ et $\tan(\varepsilon/2) = 1/\tan(\varepsilon'/2)$, on conclut que $r_1 = r_2$ équivaut à $r_3 = r_4$.

Exercice 35.

On le traite par la chasse aux angles. Avec Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 les quatre droites et Γ_1, ... les quatre cercles circonscrits. Soit A_{ij} le point d'interstection de Δ_i et Δ_j. Par définition, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ contient A_{34}. Soit S le deuxième point d'intersection. Reste à montrer que S appartient à Γ_3 pour pouvoir conclure. On va le faire par la condition de cocyclicité habituelle. On calcule l'angle $\widehat{A_{24}SA_{14}}$ (on a choisi ces deux points-là car l'un est sur Γ_1 et l'autre sur Γ_2). On a :

$$\begin{aligned}
\widehat{A_{24}SA_{14}} &= \widehat{A_{24}SA_{34}} + \widehat{A_{34}SA_{14}} \\
&= A_{24}\widehat{A_{23}}A_{34} + A_{34}\widehat{A_{13}}A_{14} \\
&= (\Delta_2, \Delta_1) = A_{24}\widehat{A_{12}}A_{14}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Une autre démarche possible serait d'utiliser la droite de Simson (pour les cercles concourants) et la droite de Steiner (pour les orthocentres alignés).

Exercice 36.

Considérons le lieu des points M vérifiant la première égalité $MA^2 + MB^2 - AB^2 = MB^2 + MC^2 - BC^2$. C'est équivalent à $MA^2 - MC^2 = BA^2 - BC^2$, donc le lieu est une droite perpendiculaire à (AC) et passant par B, c'est-à-dire la hauteur issue de A dans ABC.

De même, le lieu des points M vérifiant la seconde égalité $MB^2 + MC^2 - BC^2 = MC^2 + MA^2 - CA^2$ est la hauteur issue de C. Donc l'unique point M vérifiant la double égalité est l'orthocentre.

Exercice 37.

Soit E un tel ensemble, et $a \in E$ quelconque. Alors d'après l'hypothèse, $(a+a)/a = 2 \in E$. On peut remarquer que le singleton $\{2\}$ est en fait une solution du problème. On suppose dorénavant que E contient au moins un autre élément que 2.

Si 1 est dans E, alors pour tout $a \in E$, $(a+1)/1 = a+1 \in E$, donc une récurrence immédiate montre que $E = \mathbb{N}^*$, qui est bien une solution.

Dans le cas contraire, soit m le plus petit élément de E autre que 2. Si m était pair, disons $m = 2k$ avec $k \geqslant 2$, on aurait $(2k+2)/2 = k+1 \in E$. Or $2 < k+1 < 2k$, ce qui contredirait la minimalité de m. Donc m est impair, et $m+2$ est aussi dans E, et de même pour $m+2p$ pour tout $p \geqslant 0$. Tous les nombres impairs à partir de m sont donc dans E, et en particulier km pour tout $k \geqslant 1$ impair. Ainsi, $(km+m)/m = k+1 \in E$, ce qui montrer que E contient tous les entiers pairs, et en particulier 4. La minimalité de m assure alors que $m = 3$ et donc que E contient tous les entiers au moins égaux à 2, ce qui réciproquement fournit bien une solution au problème.

Finalement, il y a trois solutions, qui sont $\{2\}$, $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Exercice 38.

Solution proposée par Elisabeth Golovina-Benois. On calcule tous les angles sur la figure. On note M l'intersection de (EC) et (BD). Dans le triangle EMB, on a $a/\sin 110^{circ} = b/\sin 50^\circ$ avec $a = BE$ et $b = BM$. On en déduit que $\frac{a}{b} = \frac{\sin 110^\circ}{\sin 50^\circ}$.

On va montrer que AED et EMB sont semblables (car cela semble raisonnable). On pose $c = AE$ et $d = AD$ et $e = EC$. On calcule d en fonction de a :

$$d = \frac{a \sin 30^\circ}{\sin 40^\circ}$$

Pour calculer c, on calcule d'abord e en fonction de a :

$$e = \frac{a \sin 30^\circ}{\sin 50^\circ}$$

puis :

$$\frac{a \sin 30^\circ}{\sin 20^\circ \sin 50^\circ} = \frac{c}{\sin 30^\circ}$$

On calcule enfin c/d. Apres simplification, il vient :

$$\frac{c}{d} = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 50^\circ}$$

Autre solution. Soit $F \in [AB]$ tel que $\widehat{FCB} = 60°$, de sorte que $BCBF$ soit un trapèze isocèle. Soit G le point d'intersection de (BD) et (CF). Les triangles BCG et DFG sont équilatéraux, car $\widehat{GBC} = \widehat{GCB} = 60°$. Le triangle BCE est isocèle en B, car $\widehat{BEC} = 180° - \widehat{EBC} - \widehat{ECB} = 50° = \widehat{ECB}$. Donc $BE = BC$.

Or $BC = BG$, donc $BE = BG$. Puis $\widehat{BEG} = \widehat{BGE} = 90° - \widehat{EDG}/2 = 90° - (80° - 60°)/2 = 80°$.

Alors $\widehat{FEG} = 180° - \widehat{DEG} = 100°$, puis $\widehat{EGF} = 180° - \widehat{EFG} - \widehat{FEG} = 40°$, vu que $\widehat{EFG} = \widehat{BFC} = 180° - 80° - 60° = 40°$. Il en résulte que $\widehat{EFG} = \widehat{EGF} = 40°$, et le triangle $\widehat{EFG}$ est isocèle en E. De plus FDG est isocèle en D, et ainsi $EGDF$ est un quadrilatère isocèle, avec (ED) médiatrice de $[FG]$; la droite (ED) est bissectrice de l'angle $\widehat{FEG}$, et on conclut que $\widehat{AED} = \widehat{FED} = \widehat{FEG}/2 = 50°$.

Exercice 39.

Solution proposée par Igor Kortchemski. La méthode de résolution est quasiment imposée : on va recourir au théorème de Menelaüs.

L'angle $\widehat{AMC}$ est égal à $\pi - \alpha - 2\gamma$. On applique la loi des sinus dans MBA puis dans MCA. On a donc :

$$\frac{MB}{\sin\gamma} = \frac{AB}{\sin(\alpha + 2\gamma)}$$
$$\frac{MC}{\sin(\alpha + 2\gamma)} = \frac{AC}{\sin(\alpha + 2\gamma)}$$

et ainsi :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{c\sin\gamma}{b\sin\beta} = \frac{c^2}{b^2}$$

On conclut en faisant les trois produits.

Exercice 40.

Ça sent la convexité. On prend la fonction convexe qui nous tend les bras. C'est $\frac{1}{x+1}$. On va pas se compliquer la vie et on va essayer ca. Le membre de gauche peut se minorer par $\frac{1}{1/n\sum r_i + 1}$. Tout se passe bien sauf que l'inégalité n'est pas dans le bon sens.

L'idée est quand même déraisonnable, vu qu'on n'utilise nulle part que les r_i sont supérieurs ou égaux à 1 et que cette inégalité est nécessaire. On fixe leur produit à 1 et on en fait tendre $n - 1$ vers l'infini. Le dernier va tendre violemment vers 0. Le membre de gauche tend vers 1 et le second est $n/2$, d'où un problème pour n suffisamment grand...

On va trouver une autre fonction convexe, assez proche de la première. Pour passer de 1 à 0, l'idée naturelle est d'écrire $r_i = e^{x_i}$. On pose $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$. Cette fonction est strictement convexe sur $\mathbb{R}^+$ et on applique l'inégalité de Jensen.

On a en bonus le cas d'égalité obtenu seulement quand les r_i sont égaux.

Exercice 41.

Pour toute paire de points $\{A, B\}$ de E, on note $n(A, B)$ le nombre de droites qui séparent A et B. On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme. *Pour tous A, B, C distincts dans E, le nombre $t(A,B,C) = n(A,B)+n(B,C)+n(C,A)$ est impair.*

Démonstration. Une droite donnée peut :
- ou bien ne pas rencontrer l'intérieur du triangle ABC, auquel cas elle compte pour 0 dans la somme $t(A,B,C)$,
- ou bien rencontrer l'intérieur du triangle en traversant deux côtés, auquel cas elle compte pour 2 dans la somme $t(A,B,C)$,
- ou enfin passer par un sommet et couper le côté opposé, auquel cas elle compte pour 1 dans la somme $t(A,B,C)$.

La parité de $t(A,B,C)$ est donc celle du nombre de droites qui passent par un sommet de ABC en recoupant le côté opposé. Or il est clair que, puisque trois points de E ne sont jamais alignés, pour tout point M extérieur au triangle, une et une seule des droites (MA), (MB), (MC) vérifie cette condition. Par contre, pour tout point M intérieur au triangle, ce sont cette fois les trois droites qui satisfont la condition. Donc si l'on note respectivement E et I les nombres de points extérieurs et intérieurs à ABC, on a :

$$t(A,B,C) \equiv E + 3I \equiv E + I \pmod 2$$

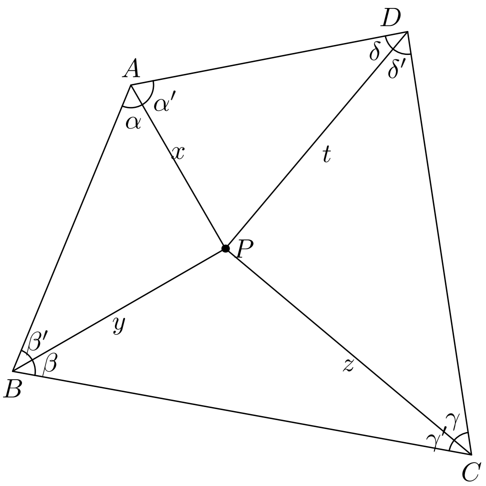
Mais $E + I = 2004 - 3 = 2001$, d'où le résultat. □

On note $E = \{A_1, \ldots, A_{2004}\}$, et on colorie A_1 en rouge. Pour tout $i \geqslant 2$, on colorie ensuite A_i en rouge si $n(A_1, A_i)$ est impair, et en bleu sinon. La propriété désirée est alors assurée au moins pour les paires contenant A_1.

Soit maintenant $\{A_i, A_j\}$ une paire ne contenant pas A_1. Si A_i et A_j sont tous les deux rouges, $n(A_1, A_i)$ et $n(A_1, A_j)$ sont tous les deux impairs, et le lemme assure qu'alors $n(A_i, A_j)$ est également impair. Si A_i et A_j sont tous les deux bleus, on a cette fois $n(A_1, A_i)$ et $n(A_1, A_j)$ pairs, et donc $n(A_i, A_j)$ est encore impair. Enfin, si par exemple A_i est rouge et A_j bleu, $n(A_1, A_i)$ est impair et $n(A_1, A_j)$ est pair, donc $n(A_i, A_j)$ est pair.

On a finalement bien construit un coloriage adéquat.

Exercice 42.



Avec les notations de la figure et d'après la loi des sinus, il vient :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta'} = \frac{y}{x}$$

et les trois relations analogues. En faisant le produit, on obtient

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta = \sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma'\sin\delta'$$

Notons p la valeur commune de ces deux produits. Alors p^2 est le produit de huit sinus d'angles dans $]0,\pi[$ dont la somme vaut 2π, et donc dont la moyenne vaut $\pi/4$. La fonction $x \mapsto \log\sin x$ étant concave sur $]0,\pi[$, on en déduit que $p^2 \leqslant \sin^8(\pi/4)$, donc $p \leqslant \sin^4(\pi/4)$, ce qui assure l'existence d'un facteur inférieur ou égal à $\pi/4$ parmi $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, $\sin\delta$.

Acte IV

Mardi

Scène 1

La géométrie contre-attaque

Exercice 43 (Olympiade coréenne 1998)

Soit D, E, F des points sur les côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ d'un triangle ABC. Soit P, Q, R les seconds points d'intersection de (AD), (BE), (CF) avec le cercle circonscrit à ABC. Montrer que l'on a :

$$\frac{AD}{PD}+\frac{BE}{QE}+\frac{CF}{RF}\geqslant 9$$

Exercice 44

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe d'aire S. Soit A', B', C', D' les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Quelle est l'aire de $A'B'C'D'$?

Scène 2

Le retour du Lo-Jac

Exercice 45 (OIM 1989)

Soit ABC un triangle acutangle. Les bissectrices intérieures des angles du triangle recoupent le cercle circonscrit Γ en A_1, B_1, C_1. Les bissectrices extérieures se recoupent en les points A_0, B_0, C_0. Montrer que :

1. l'aire de $A_0B_0C_0$ est le double de l'aire de $AC_1BA_1CB_1$.
2. l'aire de $A_0B_0C_0$ est supérieure ou égale à quatre fois celle de ABC.

Exercice 46

Considérons un quadrilatère convexe $ABCD$ vérifiant l'égalité d'angles $ADB = ACD$ et vérifiant $AC = CD = DB$. Montrer que $\frac{OC}{OB} - \frac{OA}{OD} = 1$, le point O étant l'intersection des diagonales (AC) et (BD).

Exercice 47 (Olympiade grecque 1996)

Soit ABC un triangle acutangle, H son orthocentre, D, E, F, les pieds des trois hauteurs (AH), (BH) et (CH) respectivement. Soient M et N les milieux de $[BC]$ et $[AH]$ respectivement. Montrer que

1. (MN) est perpendiculaire à (EF),
2. si (MN) recoupe en K et L les bissectrices intérieures de extérieures de l'angle BAC, alors $KL = AH$.

Exercice 48 (Olympiade bulgare 1996)

Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle Γ. Les droites (AB) et (CD) se coupent en E et les diagonales (AC) et (BD) se coupent en F. Les cercles circonscrits aux triangles AFD et BFC se recoupent en H. Montrer que l'angle $\widehat{EHF}$ est droit.

Exercice 49 (APMEP 252)

On se donne un angle de sommet O. Sur l'un des côtés, on choisit deux points A et A', et sur l'autre, deux points B et B'. Les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en un point M. Sur le cercle circonscrit au triangle OAB, on construit la corde $[OD]$ parallèle à $(A'B')$, et sur le cercle circonscrit au triangle $OA'B'$, la corde $[OD']$ parallèle à (AB). Montrer que la droite (DD') passe par le point M.

Scène 3

Corrigés

Exercice 43.

On peut commencer par remarquer que AD/PD est égal au rapport $d(A, BC)/d(P, BC)$ des distances de A et P à (BC). Le numérateur de cette fraction étant constant, le minimum est obtenu pour un dénominateur maximal, c'est-à-dire lorsque P est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$. Et on a les conclusions analogues pour Q et R.

Par suite, il suffit de prouver le résultat demandé lorsque les droites (AD), (BE) et (CF) sont les bissectrices de ABC. Dans ce cas, $\widehat{PBD} = \widehat{BAC}/2 = \widehat{PAB}$, et donc les triangles PBD et PAB sont semblables. On en déduit que :

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PA}{PB} \cdot \frac{PB}{PD} = \left(\frac{PA}{PB}\right)^2 = \left(\frac{AB}{BD}\right)^2$$

Or il est classique que comme D est le pied de la bissectrice issue de A, on a $AB/BD = (b+c)/a$, et de même $BC/CE = (c+a)/b$ et $CA/AF = (a+b)/c$. En utilisant l'inégalité entre les moyennes quadratiques et arithmétiques, et le fait que $x + 1/x \geqslant 2$ pour tout $x > 0$, il vient donc :

$$\begin{aligned}
\frac{AD}{PB} + \frac{BE}{QE} + \frac{CF}{RF} + 3 &= \frac{PA}{PD} + \frac{BQ}{QE} + \frac{CR}{RF} \\
&= \left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 \\
&\geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right)^2 \\
&\geqslant 12
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 44.

L'homothétie de centre A et rapport $1/2$ transforme le triangle ABD en $AA'D'$, donc $[AA'D'] = [ABD]/4$. De la même manière, $[CC'B'] = [CBD]/4$, et donc $[AA'D'] + [CC'B'] = ([ABD] + [CBD])/4 = S/4$. De même, $[DD'C'] + [BB'A'] = S/4$, et ainsi :

$$[A'B'C'D'] = S - [AA'D'] - [BB'A'] - [CC'B'] - [DD'C'] = S/2$$

Exercice 45.

1. *Solution proposée par Thibaut Kirchner.* Comme A, B, C sont les pieds des hauteurs dans le triangles $A_0B_0C_0$, le cercle circonscrit à ABC est le cercle d'Euler de $A_0B_0C_0$. En particulier, le milieu de $[IA_0]$ est le point A_1. L'aire du triangle BIA_1 est donc le double de l'aire de BIA_0. On fait de même pour les cinq autres morceaux, ce qui conclut.
2. *Solution proposée par Antony Lee.* Soit H l'orthocentre L'homothétie de centre H et de rapport 2 envoie le cercle d'Euler de ABC sur le cercle circonscrit. Sur ce cercle d'Euler, il y a les pieds des hauteurs. Donc l'homothétie envoie ces points sur des points du cercle circonscrit, à savoir les symétriques H_A, H_B, H_C de H par rapport aux côtés du triangle.

   Il vient que l'aire de BHC est la meme que celle de BH_AC. Mais BA_1C a une aire supérieure ou égale à celle de BH_AC car A_1 est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

   On fait de même pour les deux autres triangles. La somme des trois aires est supérieure ou égale à l'aire de ABC, donc l'aire de l'hexagone $AC_1BA_1CB_1$ est supérieure ou égale à 2 fois l'aire du triangle. de ABC. D'où le résultat d'après la question précédente.

Exercice 46.

Solution proposée par Bernard Finas. Remarquons tout d'abord que AOD est isocèle en D. En effet, si l'on note $\alpha = \widehat{DCA} = \widehat{ADO}$, on a $\widehat{DAO} = \widehat{DAC} = (\pi - \alpha)/2$. Et donc comme ADC est isocèle en C, $\widehat{ADC} = (\pi - \alpha)/2$. Alors :

$$\widehat{DOC} = \pi - \widehat{ODC} - \alpha = \pi - \widehat{ADC}$$

et donc $\widehat{AOD} = \widehat{ADC} = \widehat{DAO}$.

Cela étant, $[AOD] + [ODC] = [ADC]$. On en déduit :

$$\frac{1}{2}AD \cdot OD \sin\alpha + \frac{1}{2}OC \cdot CD \sin\alpha = \frac{1}{2}AC \cdot CD \sin\alpha$$

Donc $AD \cdot OD + OC \cdot CD = AC \cdot CD$, ou encore $OC \cdot CD = AC \cdot CD - AD \cdot OD$, ce qui s'écrit encore :

$$OC \cdot CD = AC(OB + OD) - AD \cdot OD = (AC - AD)OD + AC \cdot OB$$

Or $AC - AD = BD - OD = OB$. Donc $OC(OB + OD) = OB(OD + OA + OC)$. En développant et en divisant par $OB \cdot OD$, on obtient la solution désirée.

Exercice 47.

1. Le cercle de diamètre $[AH]$ a pour centre N et passe par E et F, vu les angles droits $\widehat{HEA}$ et $\widehat{HFA}$. Donc N est sur la médiatrice de $[EF]$. De même, les angles $\widehat{BEC}$ et $\widehat{BFC}$ sont droits, donc E et F appartiennent également au cercle de diamètre $[BC]$, qui a pour centre M. M est donc aussi sur la médiatrice de $[EF]$, ce qui conclut.
2. *Solution proposée par Pierre Bertin.* Soit P l'intersection du cercle de diamètre $[AH]$ avec la bissectrice intérieure de A.

   Les arcs $\overset{\frown}{EP}$ et $\overset{\frown}{FP}$ ont même longueur, donc $EP = FP$. Le point P est ainsi sur la médiatrice (MN) de $[EF]$, ce qui signifie que $P = K$, et donc que K est sur le cercle. De même, L est sur le cercle. Comme $[KL]$ passe par le centre N du cercle, c'est un diamètre, d'où finalement $KL = AH$.

Exercice 48.

Les angles sont orientés et considérés modulo π. Soit O le centre du cercle circonscrit à $ABCD$. Alors :

$$\widehat{AHB} = \widehat{AHF} + \widehat{FHB} = \widehat{ADF} + \widehat{FCB} = 2\widehat{ADB} = \widehat{AOB}$$

donc O appartient au cercle circonscrit à AHB, et de la même façon au cercle circonscrit à CHD. Les axes radicaux des cercles circonscrits à AHB, CHD et $ABCD$ sont concourants. Or ce sont les droites (AB), (CD) et (OH), ce qui assure que E, H et O sont alignés.

D'autre part, on a :

$$\widehat{OHF} = \widehat{OHC} + \widehat{CHF} = \widehat{ODC} + \widehat{CBF} = \pi/2 - \widehat{CAD} + \widehat{CBD}$$

et donc $\widehat{EHF} = \widehat{OHF} = \pi/2$ comme souhaité.

Exercice 49.

Soit I le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits à OAB et $OA'B'$. Modulo π, les relations de cocylicité donnent :

$$\widehat{ODI} = \widehat{OAI} = \widehat{A'AI} = \widehat{A'MI}$$

ce qui est aussi l'angle entre les droites $(A'B')$ et (MI). Comme les droites (DO) et (AB) sont parallèles, il en est de même des droites (DI) et (MI), et donc D, I et M sont alignés. On montre de même l'alignement de D', I et M en remplaçant D, A, A' par D', A', A dans le raisonnement précédent.

Acte V

Mercredi

Scène 1

Le dénouement

Exercice 50

Soit n et k deux entiers strictement positifs. On considère une assemblée de k personnes telle que pour tout groupe de n personnes parmi ces k, il en existe une $(n+1)$-ième qui les connaît toutes.

1. Si $k = 2n+1$, prouver qu'une des personnes de l'assemblée connaît toutes les autres.
2. Si $k = 2n+2$, donner un exemple d'une telle assemblée dans laquelle aucune personne ne connaît toutes les autres.

Exercice 51

Soit ABC un triangle acutangle. Soit L et M les pieds des bissectrices issues de B et C. Montrer que $\widehat{BAC} = 60°$ si et seulement s'il existe un point K sur le segment $[BC]$ tel que KLM soit équilatéral.

Exercice 52

Soit S un ensemble de $n \geqslant 4$ points du plan, non tous cocycliques, et trois à trois jamais alignés. Soit f un fonction de S dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout cercle C contenant au moins trois points de S, on ait :

$$\sum_{P \in C \cap S} f(P) = 0$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Scène 2

Corrigé du test

Exercice 50.

1. Pour $n = 1$, c'est trivial, donc on peut supposer $n \geqslant 2$. On peut de plus remarquer que pour tout $p \geqslant n$ et tout groupe de p personnes, il en existe une $(p+1) - me$ qui les connaisse toutes.

   Choisissons deux personnes de l'assemblée qui se connaissent, disons P_1 et P_2. Il existe donc une personnes, disons P_3, qui les connaisse toutes les deux. On est donc en présence d'un groupe de trois personnes qui se connaissent deux à deux. Et si $n \geqslant 3$, on peut alors chosir une quatrième personne P_4 qui connaisse les trois précédentes. En itérant le procédé, on peut construire un groupe E de $(n+1)$ personnes qui se connaissent deux à deux.

   Il reste n personnes en dehors de ce groupe, mais d'après l'énoncé, l'un des membre de E, disons A, connaît chacune d'entre elles. Par construction, A connaît donc tout le monde.

2. Considérons le groupe de $2n+2$ personnes $\{A_1, \ldots, A_{n+1}, B_1, \ldots, B_{n+1}\}$ dans lequel pour tout i, A_i connaît tout le monde sauf B_i, et B_i connaît tout le monde sauf A_i. Alors un groupe E de n personnes ne peut pas contenir au moins un élement de chaque paire $\{A_i, B_i\}$, donc il existe i tel que ni A_i, ni B_i n'appartiennent à E. Dans ce cas, A_i et B_i connaissent chacun des membres de E. D'autre part, il est clair qu'aucune personne ne connaît toutes les autres.

Exercice 51.

On note I l'intersection de (BL) et (CM), et α, β, γ les angles de ABC.

Supposons que $\widehat{BAC} = 60°$. Alors $\widehat{BIC} = 180° - \beta/2 - \gamma/2 = 180° - (180° - 60°)/2 = 120°$.

Soit K le pied de la bissectrice issue de I dans le triangle BIC. Alors $\widehat{BIK} = 30° = \widehat{MIB}$. Or $\widehat{IBK} = \widehat{IBM} = \beta/2$. On en déduit que les triangles IKB et IMB sont symétriques par rapport à (BI), puis que (BL) est médiatrice de $[MK]$. Donc $ML = KM$. De même $ML = KL$, d'où l'on conclut que KLM est équilatéral.

Réciproquement, supposons l'existence de $K \in [BC]$ tel que KLM soit équilatéral. On remarque que L appartient à la fois à la bissectrice (BL) du triangle BKM, et à la médiatrice du segment $[MK]$. On en déduit que BKM est isocèle en B, car sinon L serait sur le cercle circonscrit de BKM, puis on aurait $\widehat{MBK} = 180° - \widehat{MLK} = 120°$, ce qui est absurde car ABC est acutangle.

Ainsi la droite (BL) est la médiatrice de $[MK]$. De même, (CM) est la médiatrice de $[LK]$, puis $\widehat{BIC} = 120°$. On en déduit que $\beta/2 + \gamma/2 = 60°$ et enfin que $\alpha = 60°$.

Exercice 52.

Soit A et B deux points distincts dans S. On note $C(A, B)$ l'ensemble des cercles passant par A, B et n'importe quel autre point de S. Supposons que $C(A, B)$ ait k éléments. Comme les points de S ne sont pas tous sur un même cercle, on a nécessairement $k \geqslant 2$. De plus, puisque pour chacun des cercles C de $C(A, B)$, on a :

$$\sum_{P \in C \cap S} f(P) = 0$$

il vient :

$$\sum_{C \in C(A,B)} \sum_{P \in C \cap S} f(P) = 0$$

D'autre part, pour tout point M de S autre que A et B, il existe un unique cercle $C \in C(A, B)$ passant par M (car trois points de S ne sont jamais alignés). Ainsi, dans la double somme précédente, $f(M)$ apparaît une et une seule fois, tandis que A et B apparaissent chacun k fois. On a donc :

$$(k-1)(f(A) + f(B)) = -\sum_{P \in S} f(P) = s$$

et le réel s est indépendant de la paire $\{A, B\}$ considérée. En particulier, $f(A) + f(B)$ est du signe contraire de s pour toute paire $\{A, B\}$. En sommant sur toutes les paires $\{A, B\}$, on obtient donc que $(n-1)s$ est du signe contraire de s, ce qui entraîne que $s = 0$, et par suite, $f(A) + f(B) = 0$ pour tous A et B distincts dans S.

Pour A, B, C trois points quelconques de S, on a donc $f(A) + f(B) = f(B) + f(C) = f(C) + f(A) = 0$, d'où $f(A) = f(B) = f(C) = 0$, et f est nécessairement la fonction nulle.

Un tour dans les coulisses

Hymne

Trombi 1

Trombi 2

Table des matières