

Indications de solutions

Exercice 1.

D, A, B, M sont cocycliques donc $\widehat{DAR} = \widehat{OBQ}$ (O centre du carré). En utilisant les angles droits \widehat{ADR} et \widehat{BOQ} on conclut que ADR et BOQ sont semblables d'où : $\frac{OQ}{DR} = \frac{OB}{DA}$ et donc aussi : $\frac{OQ}{OC} = \frac{DR}{DC}$.

Par le théorème de Thalès (OD) est parallèle à (QR) et donc l'angle \widehat{OQR} est droit. On a de même (OC) est parallèle à (PS) et \widehat{OPS} est droit, d'où la conclusion.

Exercice 2.

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} = \frac{ab+bc+ca+(a+b+c)}{(a+1)(b+1)(c+1)}.$$

Or :

$$\begin{aligned} ab+bc+ca+(a+b+c) &= \frac{3}{4}(ab+bc+ca+a+b+c) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+bc}{2} + \frac{b+ca}{2} + \frac{c+ab}{2}\right) \\ &\geq \frac{3}{4}(ab+bc+ca+a+b+c) + \frac{1}{2}(\sqrt{abc} + \sqrt{abc} + \sqrt{abc}) \\ &\geq \frac{3}{4}(ab+bc+ca+a+b+c+2) \end{aligned}$$

et $(a+1)(b+1)(c+1) = ab+bc+ca+a+b+c+2$.

On a égalité si et seulement si $\frac{a+bc}{2} = \sqrt{abc}$ et idem pour les autres à savoir $a = bc$, $b = ca$ et $c = ab$ soit $a = b = c = 1$.

Exercice 3.

Pour $n = 1$, $a + 1$ divise $b + 1$ donc soit $a = b$, soit $b + 1 \geq 2a + 2$ et donc $b > 2a$ et donc $b > a$ avec même $b \geq 3$.

Cette hypothèse est absurde. Prenons p premier, $p > \text{Max}(a, b) = b$.

Soit par le théorème chinois, soit en prenant directement :

$$n = (a+1)(p-1) + 1$$

$$\text{On trouve } n, \text{ entier, avec } n \equiv 1 \pmod{p-1} \text{ et } n \equiv -a \pmod{p}.$$

$$\text{On a alors : } a^n \equiv a \pmod{p} \text{ car } a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \text{ (} p \text{ ne divise pas } a\text{)}.$$

$$\text{Et } a^n + n \equiv 0 \pmod{p}.$$

p divise $a^n + n$ donc p divise $b^n + n$. Or $b^n + n \equiv b - a \pmod{p}$ et $p|b - a$ ce qui est absurde car $b - a \geq 1$ et $p > b - a$.

Exercice 4.

Par des considérations évidentes on ne change pas le problème en supposant :

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \text{ et } b_1 = 1 - a_1, b_2 = 1 - a_2, \dots, b_n = 1 - a_n.$$

Si $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{n+1}{4}$ ou $b_1 + \dots + b_n \leq \frac{n+1}{4}$ on raye la mauvaise ligne.

Sinon on dispose de k tel que :

$a_1 + \dots + a_k \leq \frac{n+1}{4}$ et $a_1 + \dots + a_{k+1} > \frac{n+1}{4}$. On raye a_{k+1}, \dots, a_n et b_1, \dots, b_k et ceci convient. En effet :
 $b_{k+1} + b_{k+2} + \dots + b_n = (n-k) - (a_{k+1} + \dots + a_n)$ et $a_{k+1} + \dots + a_n \geq (n-k)a_{k+1}$ donc $b_{k+1} + \dots + b_n \leq (n-k) - (n-k)a_{k+1}$. On a aussi $(k+1)a_{k+1} > \frac{n+1}{4}$, d'où :

$$b_{k+1} + \dots + b_n \leq (n-k) \left(1 - \frac{n+1}{4(k+1)} \right) \leq \frac{n+1}{4} \text{ (il s'agit de } (2k-n+1)^2 \geq 0 \text{).}$$

Exercice 5.

On appelle B' le symétrique de B par rapport à I et O le milieu de IB' .

ILB' est symétrique de IEB donc $\widehat{B'LI} = \frac{\pi}{2}$ et $OL = OI = OB'$.

On a de même $OK = OI = OB'$.

L'hypothèse $AB + BC = 3AC$ entraîne facilement $BD = AC$ et un calcul angulaire utilisant $\widehat{AIC} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}$ entraîne

facilement $AI = IB' \cos(\widehat{AIB'})$ donc AIB' rectangle en A et $OA = OI$.

A, K, L, I, C, B' sont cocycliques.

Exercice 6.

On raisonne par l'absurde en supposant la propriété non vérifiée. On peut supposer la répartition :

$$A = \{1 < 2 < \dots < k-1 < \dots\} \text{ avec } k \geq 2.$$

$$B = \{k < b_2 < \dots < b_n\}.$$

$$C = \{c_1 < c_2 < \dots < c_n\} \text{ avec } c_1 > k \geq 2 \text{ donc } c_1 \geq 3.$$

Montrons le lemme : si $x \in C$ alors $x-1 \in A$.

→ Déjà $x-1 \notin B$ car sinon : $x = 1 + x-1$.

→ Il en résulte que si $x = c_1$ alors $x-1 \in A$ car $c_1 - 1 \notin C$.

Reste le cas $x \geq c_2$. On raisonne par l'absurde en supposant $x-1 \in C$.

On peut former $x-k$ et $x-k \notin A$ (sinon $x = x-k+k$),

$x-k \notin B$ (sinon $x-1 = x-k+(k-1)$)

et alors $x-k \in C$. Mais on peut aussi former $x-k-1$ ($x \geq c_2$)

et $x-k-1 \notin A$ (sinon $x-1 = x-k-1+k$),

$x-k-1 \notin B$ (sinon $x-k = x-k-1+1$)

et donc $x-k-1 \in C$.

Ceci retrouve $x-k \in C$ et $x-k-1 \in C$, par récurrence on aboutit à une contradiction lorsque x arrive en c_2 .

Ainsi le lemme est prouvé et il entraîne la présence dans A de : $1 < c_1 - 1 < c_2 - 1 < \dots < c_n - 1$, soit $(n+1)$ éléments.