

Relativité et Géométrie

Mathematic Park
IHP

David A. Madore
Télécom ParisTech
david.madore@enst.fr

10 novembre 2012

Plan

Présentation
historique et
physique

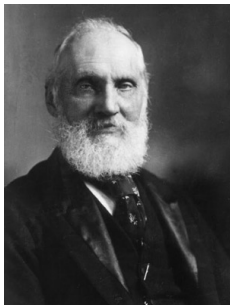
Trois relativités
et leur géométrie

Un tout petit
peu de relativité
générale

Présentation historique et physique

Trois relativités et leur géométrie

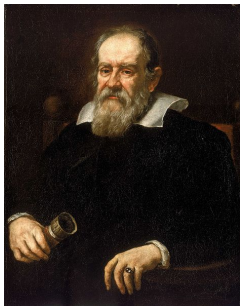
Un tout petit peu de relativité générale



William Thomson, 1st baron Kelvin (1824–1907)

« The beauty and clearness of the dynamical theory, which asserts heat and light to be modes of motion, is at present obscured by **two clouds**. »

Discours du 27 avril 1900, British Association for the Advancement of Science.



Galileo Galilei (1564–1642)

« Fate muover la nave con quanta si voglia velocità ; ché (pur che il moto sia **uniforme** e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma. »

Dialogue sur deux systèmes du monde (1632) (2^e voyage)

Les lois de la physique sont invariantes par :

▶ translation dans l'espace et dans le temps :

$$(t, \vec{x}) \leftarrow (t + t_0, \vec{x} + \vec{x}_0),$$

▶ rotation dans l'espace : $(t, \vec{x}) \leftarrow (t, R(\vec{x}))$ (pour $R \in SO_3$), et

▶ changement de référentiel en translation uniforme :

$$(t, \vec{x}) \leftarrow (t, \vec{x} + t\vec{v}_0).$$

Ces transformations définissent le **groupe de Galilée**.

Conséquences :

▶ un intervalle de temps absolu ($t' - t$) a un sens,

▶ un intervalle d'espace absolu ($\|\vec{x}' - \vec{x}\|$) n'en a pas, sauf si $t' = t$,

▶ une vitesse relative a un sens, une vitesse absolue non.

Les équations de Maxwell (1862)

$$\begin{array}{l|l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array}$$

ne sont pas invariantes par le groupe de Galilée car elles prédisent la propagation d'ondes à la vitesse $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$: par rapport à quoi ?

⇒ Postulat de l'existence de l'**éther luminifère** (Young 1800 ; Fresnel 1818).

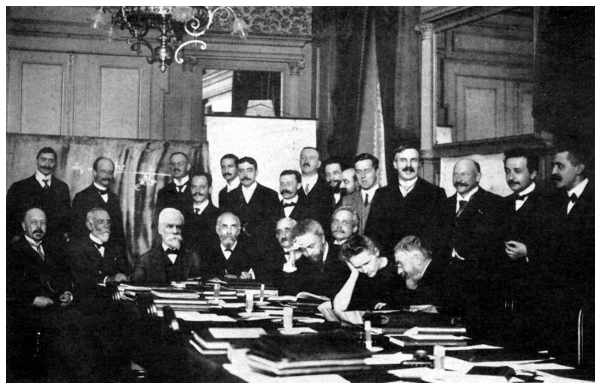
Expériences de Michelson & Morley (1881–1887) : tentatives pour mesurer la vitesse de la Terre dans l'éther.

Résultat négatif (un des deux « nuages » de Kelvin).

Plan

Présentation
historique et
physiqueTrois relativités
et leur géométrieUn tout petit
peu de relativité
générale

Comment résoudre ce « nuage » ?



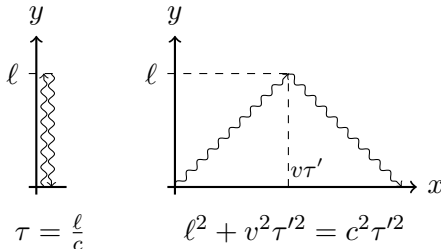
1^{er} colloque Solvay (1911)

- ▶ H. A. Lorentz (1895) : concept de « temps local ».
- ▶ H. Poincaré (1898, « La mesure du temps ») : propose la constance de la vitesse de la lumière pour définir le temps.
- ▶ A. Einstein (1905, « De l'électromagnétisme des corps en mouvement ») : postulats de la relativité.

Les postulats d'Einstein (1905)

- ▶ **Principe de relativité** : Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels.
- ▶ **Invariance de c** : La vitesse de la lumière est la même mesurée dans tout référentiel inertiel.

Conséquence inévitable : les intervalles de temps dépendent de l'observateur !



\implies Apparition du **facteur de Lorentz** $\gamma = \frac{\tau'}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$.

Formule de Lorentz

Si l'observateur O' voit l'observateur O se déplacer à la vitesse v , alors :

► un intervalle de temps τ pour l'observateur O paraît comme $\tau' = \gamma\tau$ à l'observateur O' (**dilatation du temps**),

► une longueur d' dans le sens du mouvement pour l'observateur O' paraît comme $d = d'/\gamma$ à l'observateur O (**contraction des longueurs**),

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ (on a $\gamma \geq 1$).

Résultats confus sous cette forme. Pourquoi ne sont-ils pas symétriques ? (Paradoxe des jumeaux de Langevin.)

Composition des vitesses : si l'observateur O'' voit O' se déplacer à vitesse v' dans le même sens, alors il voit O se déplacer à vitesse $\frac{v+v'}{1+(vv'/c^2)}$.

Changement de référentiel

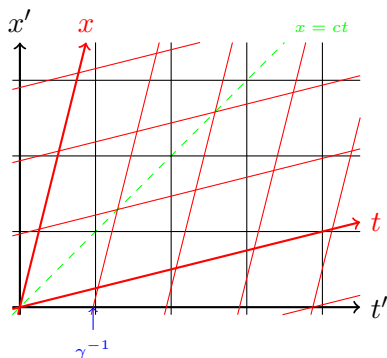
$O(t, x)$ en mouvement à vitesse v par rapport à $O'(t', x')$.

Plan

Présentation
historique et
physique

Trois relativités
et leur géométrie

Un tout petit
peu de relativité
générale



$$\begin{cases} t' = \gamma t + \gamma \frac{v}{c^2} x \\ x' = \gamma vt + \gamma x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} t = \gamma t' - \gamma \frac{v}{c^2} x' \\ x = -\gamma vt' + \gamma x' \end{cases}$$

(Transformation de Lorentz)

Remarque : $c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2$



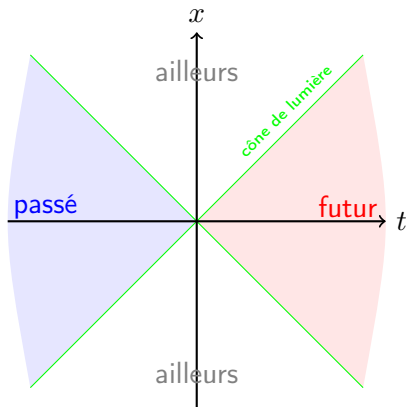
Hermann Minkowski (1864–1909)

Raum und Zeit, 1909

► **Espace-temps** = espace de dimension 4
des « événements » (donnée simultanée des coordonnées
d'espace et de temps).

► Donnés deux événements (t_1, x_1, y_1, z_1) et (t_2, x_2, y_2, z_2) ,
la quantité $c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$
ne dépend pas du référentiel.

Régions de l'espace-temps



Par rapport à $(0, 0, 0, 0)$, on dit que (t, x, y, z) est :

- ▶ dans le **futur** si $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ et $t > 0$,
- ▶ dans le **passé** si $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ et $t < 0$,
- ▶ **ailleurs** si $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 < 0$.

Désormais, on posera $c = 1$.

Autrement dit,

- ▶ soit les temps sont mesurés en mètres,
- ▶ soit les distances sont mesurées en secondes(-lumière),
avec $1 \text{ s} = 299\,792\,458 \text{ m}$ (définition du mètre SI).

La relativité restreinte revisitée

On postule :

- ▶ l'espace-temps est un **espace affine** (réel) de dimension 4 (espace affine = « espace vectoriel moins l'origine » ; les différences entre deux points sont alors des vecteurs, et l'espace vectoriel qu'ils forment est l'*espace vectoriel tangent*),
- ▶ son espace vectoriel tangent est muni d'une **forme quadratique** de signature $(1, 3)$, c'est-à-dire que modulo un choix de base elle s'écrit : $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ (« métrique de Minkowski »).

Forme bilinéaire (« produit scalaire ») associé :

$$tt' - xx' - yy' - zz'.$$

- ▶ Les transformations vectorielles qui préservent cette forme quadratique s'appellent le **groupe de Lorentz** $O_{1,3}$,
- ▶ les transformations affines qui la préservent s'appelle le **groupe de Poincaré** $\mathbb{R}^4 \rtimes O_{1,3}$ (autrement dit « Lorentz plus translations »).

Dans un monde parallèle (Greg Egan, trilogie *Orthogonal*) :

- ▶ l'espace-temps est un **espace affine** (réel) de dimension 4
- ▶ son espace vectoriel tangent est muni d'une **forme quadratique** de signature $(4, 0)$, c'est-à-dire positive définie : modulo un choix de base elle s'écrit : $t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ (« métrique d'Euclide »).

Forme bilinéaire (produit scalaire) associé :

$$tt' + xx' + yy' + zz'.$$

- ▶ Les transformations vectorielles qui préservent cette forme quadratique s'appellent le **groupe des isométries vectorielles** O_4 ,
- ▶ les transformations affines qui la préservent s'appelle le **groupe des isométries affines** $\mathbb{R}^4 \rtimes O_4$.

Avant 1905 :

- ▶ l'espace-temps est un **espace affine** (réel) de dimension 4
- ▶ son espace vectoriel tangent est muni d'une **forme quadratique** dégénérée qui est le carré d'une forme linéaire t (« le temps galiléen »), et d'une forme quadratique positive définie sur le noyau de t (la « distance d'espace »).

- ▶ Les transformations vectorielles qui préservent ces formes s'appellent le **groupe des Galilée homogène** $\mathbb{R}^3 \rtimes O_3$,
- ▶ les transformations affines qui les préservent s'appelle le **groupe de Galilée inhomogène** $\mathbb{R}^4 \rtimes (\mathbb{R}^3 \rtimes O_3)$.

Les transformations

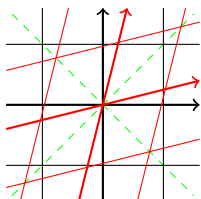
- ▶ $(t, x, y, z) \mapsto (-t, x, y, z)$ (« inversion du temps »)
 - ▶ $(t, x, y, z) \mapsto (t, -x, y, z)$ (« symétrie de l'espace »)
- appartiennent a priori à tous les groupes indiqués.

On peut vouloir les écarter, c'est-à-dire se limiter aux transformations qui préservent

- ▶ l'orientation de l'espace-temps (i.e., de déterminant positif), et
- ▶ le sens du temps (sauf dans le cas « euclidien » où ça n'a pas de sens).

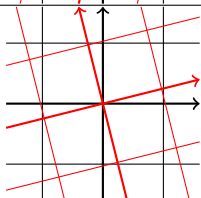
Changements de référentiels en dimension 1 + 1

Minkowski



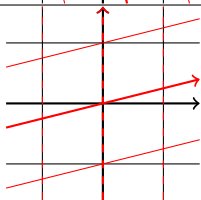
$$\begin{cases} t' = \lambda t + \mu x \\ x' = \mu t + \lambda x \\ (\lambda^2 - \mu^2 = 1, \lambda > 0) \end{cases}$$

Euclide



$$\begin{cases} t' = \lambda t - \mu x \\ x' = \mu t + \lambda x \\ (\lambda^2 + \mu^2 = 1) \end{cases}$$

Galilée



$$\begin{cases} t' = t \\ x' = \mu t + x \end{cases}$$

Qu'est-ce qu'une vitesse, au juste ?

Définition naïve : $x' = vt'$ (pour $x = 0$). Ceci donne $v = \mu/\lambda$ (avec $\lambda := 1$ dans le cas galiléen). C'est la pente de la droite.

Est-ce une bonne définition ? On voudrait que les vitesses s'ajoutassent.

Les changements de référentiel en dimension $1 + 1$ définissent des « groupes à 1 paramètres » (dans SL_2) : il existe un morphisme de groupe $\exp : \mathbb{R} \rightarrow G$ surjectif tel que $\exp(\psi + \psi') = \exp(\psi) \exp(\psi')$; de plus, \exp est uniquement défini si on demande que $\exp(\psi)$ coïncide « pour ψ petit » (i.e., à l'ordre 1) avec le cas galiléen : $\mu(\psi) = \psi + o(\psi)$ et $\lambda(\psi) = 1 + o(\psi)$.

Ce paramètre ψ s'appelle la **rapidité**. Autrement dit :

- ▶ les rapidités s'ajoutent (en dimension $1 + 1$),
- ▶ la rapidité coïncide avec la vitesse à l'ordre 1.

Minkowski	$\begin{cases} \lambda = \cosh \psi \\ \mu = \sinh \psi \end{cases}$	$v = \tanh \psi$
Euclide	$\begin{cases} \lambda = \cos \psi \\ \mu = \sin \psi \end{cases}$	$v = \tan \psi$
Galilée	$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = \psi \end{cases}$	$v = \psi$

Dans le monde minkowskien, $|v| < 1$: la vitesse de la lumière n'est pas atteignable.

Dans le monde euclidien, ψ est défini modulo π (ou peut-être modulo 2π).

Les formules de composition des vitesses proviennent des

$$\text{formules } \tanh(\psi + \psi') = \frac{\tanh \psi + \tanh \psi'}{1 + (\tanh \psi)(\tanh \psi')} \text{ et}$$
$$\tan(\psi + \psi') = \frac{\tan \psi + \tan \psi'}{1 - (\tan \psi)(\tan \psi')}.$$

Espace des vitesses en dimension 1 + 2

Une particule en mouvement uniforme a une trajectoire de la forme

$$\begin{cases} t' = \lambda t \\ x' = \mu t \\ y' = \nu t \end{cases}$$

avec t son temps propre, et $\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 = 1$ ($\lambda > 0$) dans le cas minkowskien, $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ dans le cas euclidien, et $\lambda = 1$ dans le cas galiléen.

Les espaces des vitesses sont donc respectivement : une nappe d'un hyperboloïde à deux nappes, une sphère (peut-être modulo antipodie), et un plan.

Quitte à (dé)faire une rotation d'angle θ tel que $\mu = \rho \cos \theta$ et $\nu = \rho \sin \theta$, on peut se ramener à la dimension 1 + 1, où on a une particule de rapidité ψ telle que (λ, ρ) soit respectivement $(\cosh \psi, \sinh \psi)$ ou $(\cos \psi, \sin \psi)$ ou $(1, \psi)$.

Paramétrage par rapidité et cap en dim. 1 + 2

Pour ψ =rapidité et θ =cap :

$$\text{Minkowski} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \cosh \psi \\ \mu = \sinh \psi \cos \theta \\ \nu = \sinh \psi \sin \theta \end{array} \right.$$

$$\text{Euclide} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \cos \psi \\ \mu = \sin \psi \cos \theta \\ \nu = \sin \psi \sin \theta \end{array} \right.$$

$$\text{Galilée} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \mu = \psi \cos \theta \\ \nu = \psi \sin \theta \end{array} \right.$$

Ce sont des paramétrages respectifs d'une nappe d'un hyperboloïde à deux nappes, d'une sphère, et d'un plan.

Rapidité relative

Un observateur voit deux particules partir, avec rapidité et cap respectivement (ψ, θ) et (ψ', θ') . Comment calculer la rapidité ψ'' de l'une observée par rapport à l'autre ?

En dimension $1 + 1$, i.e., si $\theta' = \theta$, c'est facile : les rapidités s'ajoutent donc $\psi'' = \psi' - \psi$ (disons pour $\psi' > \psi$).

Le produit scalaire minkowskien ou euclidien doit être conservé par changement de référentiel. Donc, dans le cas minkowskien :

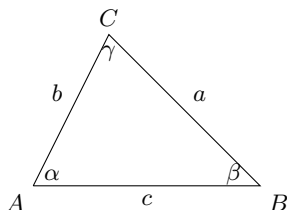
$$\cosh \psi'' = \cosh \psi \cosh \psi' - \sinh \psi \sinh \psi' \cos(\theta - \theta')$$

et dans le cas euclidien :

$$\cos \psi'' = \cos \psi \cos \psi' + \sin \psi \sin \psi' \cos(\theta - \theta')$$

Quant au cas galiléen, c'est une formule standard du triangle plan (al-Kāshī), ou l'ordre le plus bas des formules ci-dessus :

$$\psi''^2 = \psi^2 + \psi'^2 - 2\psi\psi' \cos(\theta - \theta')$$



Rappel : c n'est plus la vitesse de la lumière... Et γ n'est plus le facteur de Lorentz.

Les trois mêmes formules :

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

La troisième est une relation fondamentale du triangle euclidien. La seconde, du triangle sphérique. La première, du triangle « hyperbolique ».

Dualité côtés-angles

Si ABC est un triangle sphérique, et A', B', C' les points **polaires** de BC, AC, AB (=points orthogonaux à ces grands cercles, définis à antipodie près), alors $a' = \pi - \alpha$, etc. On en déduit :

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

Dans le cas hyperbolique, la polarité n'est définie que si on autorise des points « idéaux » (=à vitesse de la lumière) et « ultra-idéaux » (=droites de type espace). Une formule analogue vaut cependant :

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh c$$

Ces formules impliquent $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ dans le cas sphérique et $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ dans le cas hyperbolique.

Pour le triangle euclidien, on a simplement

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{i.e., } \alpha + \beta + \gamma = \pi).$$

En dimension 2 :

- ▶ Géométrie hyperbolique = modélisée par une nappe d'un hyperboloïde à deux nappes, mais *pour la métrique de Minkowski*.
- ▶ Géométrie sphérique = modélisée par une sphère ou plutôt une sphère modulo antipodie (plan projectif réel).
- ▶ Géométrie euclidienne.

Les groupes de Lorentz $SO_{1,2}$, des isométries vectorielles SO_3 et de Galilée homogène $\mathbb{R}^2 \rtimes SO_2$, apparaissent comme les groupes des isométries de ces trois géométries.

En fait, l'étude de l'« espace des vitesses », i.e., des *droites* dans l'espace-temps revient à étudier l'espace projectif associé à l'espace vectoriel tangent à l'espace-temps.



Felix Klein (1849–1925)

Programme d'Erlangen (1872) : Étudier les différentes « géométries » par l'intermédiaire de leurs groupes de symétries.

Autrement dit : réaliser les géométries comme des espaces homogènes sous des groupes de Lie (=groupes de transformations continues).

Et la vitesse, alors ?

La vitesse v au sens naïf (soit $\tanh \psi$ ou $\tan \psi$ ou ψ dans les cas minkowskien, euclidien et galiléen) a-t-elle un intérêt ?

Si on envoie (ψ, θ) sur le point du plan $(v \cos \theta, v \sin \theta)$ (atteint par la particule en 1 unité du temps de l'observateur de référence) :

- ▶ pour la géométrie sphérique, ceci définit la **projection gnomonique** de la sphère (projection depuis le centre de la sphère), la seule qui préserve l'alignement,
- ▶ pour la géométrie hyperbolique, ceci définit le **modèle de Beltrami-Klein** (projection depuis le centre de l'hyperboloïde) de l'espace hyperbolique comme l'intérieur d'un disque.

L'alignement dans ces modèles a bien le sens qu'on leur imagine (une droite = un faisceau de vitesses de particules envoyées toutes dans la même direction les unes par rapport aux autres).

Un mot sur la projection stéréographique

On définit un nouvel avatar de la vitesse, \tilde{v} , qui vaut $2 \tanh \frac{\psi}{2}$ ou $2 \tan \frac{\psi}{2}$ ou ψ selon le cas (de nouveau, $\tilde{v} \approx v$ à l'ordre le plus bas).

Si on envoie (ψ, θ) sur le point du plan $(\tilde{v} \cos \theta, \tilde{v} \sin \theta)$:

- ▶ pour la géométrie sphérique, ceci définit la **projection stéréographique** de la sphère (projection depuis le pôle opposé),
- ▶ pour la géométrie hyperbolique, ceci définit le **modèle du disque de Poincaré** qui voit aussi l'espace hyperbolique comme l'intérieur d'un disque.

Sous ces projections, les droites de la géométrie sphérique ou hyperbolique deviennent des cercles du plan ; en contrepartie, les angles sont préservés.

Par ailleurs, ce paramétrage permet de fabriquer des points à coordonnées rationnelles sur la sphère ou l'hyperboloïde.

Un isomorphisme remarquable

$$PSL_2(\mathbb{R}) \cong SO_{1,2}^+$$

$$PSL_2(\mathbb{C}) \cong SO_{1,3}^+$$

où $SO_{1,r}^+$ est le groupe de Lorentz (orthochrone direct) en dimension $1+r$, et $PSL_2(\mathbb{R})$ est le groupe des transformations projectives du cercle et $PSL_2(\mathbb{C})$ celles de la sphère de Riemann, c'est-à-dire des transformations $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec a, b, c, d réels ou complexes selon le cas, et $ad - bc = 1$ (homographie).

De plus, ces isomorphismes sont donnés par l'action sur les directions du cône de lumière (cercle ou sphère « céleste »).

Physiquement : si on effectue une transformation de Lorentz arbitraire, on voit les étoiles lointaines transformées selon une homographie de la sphère de Riemann.

On peut dire quelque chose d'analogue sur les quaternions et sur les octonions.

Qu'est-ce que la relativité générale ?

La **relativité générale** abandonne l'idée que l'espace-temps est un espace affine (plus d'homogénéité par translation : les vecteurs tangents restent arrimés à un point) et le concept des référentiels d'inertie.

On cherche une forme d'invariance beaucoup plus générale : les lois de la physique doivent être invariantes par *n'importe quel changement de coordonnées* (n'importe quel difféomorphisme de l'espace-temps).

Il faut bien sûr les reformuler (les objets en l'absence de force ne suivent plus des « droites » dans le sens naïf). Par ex., dans un référentiel tournant, on voit apparaître des forces fictives (force centrifuge, force de Coriolis).

Idée fondamentale : *unifier* la gravitation à ce type de forces.

La gravitation n'est pas une force : le **principe d'équivalence** postule que tous les objets soumis au même champ gravitationnel accélèrent de la même manière.

Par conséquent, en se plaçant **en chute libre**, on annule localement l'effet du champ gravitationnel (expérience de pensée de l'ascenseur en chute libre).

Seuls subsistent les effets de la *variation* du champ gravitationnel d'un point à l'autre (classiquement, « forces de marée »). Ce sont ces effets qui reflètent la **courbure** de l'espace-temps.



Bernhard Riemann (1826–1866)

Sur les hypothèses qui fondent la géométrie (1854, pub. 1868) : Définir une notion de courbure **intrinsèque** analogue à la courbure de Gauß des surfaces.

Mathématiquement, l'espace-temps de la relativité générale doit donc « ressembler localement » à l'espace-temps plat de Minkowski (mais avec un système de coordonnées quelconque).

On se donne donc en tout point de l'espace-temps une forme quadratique sur l'espace des vecteurs tangents, la **métrique**, qui doit (varier de façon assez lisse, et) avoir la signature $(1, 3)$ de la métrique de Minkowski.

Ceci permet notamment de définir le *temps propre le long d'une courbe* :

$$s = \int \sqrt{Q\left(\frac{dp}{dt}\right)} dt$$

où Q est la forme quadratique en question, si le vecteur tangent $\frac{dp}{dt}$ est toujours orienté vers le futur.

Géodésiques et transport parallèle

Une courbe entre deux points dont la longueur (ici, le temps propre) est extrémale est appelée **géodésique**. Ce sont les analogues sur un espace courbe des lignes droites.

En relativité générale, *les objets en chute libre suivent des géodésiques* dans l'espace-temps.

Plus généralement, de la notion de métrique on peut tirer une notion de **transport parallèle** d'un vecteur le long d'une courbe, qui permet de « transporter » un vecteur tangent à l'origine de la courbe en un autre à sa destination. Celle qui intervient ici (connexion de Levi-Civita) est la seule telle que :

- ▶ la forme quadratique du vecteur ne change pas,
- ▶ elle n'a pas de « torsion ».

Physiquement : transport gyroscopique.

Une géodésique est une courbe qui autotransporte son vecteur tangent.

La courbure

La **courbure** signifie que le transport parallèle d'un vecteur le long d'une courbe fermée (et contractile) n'est pas l'identité.

On peut aussi la voir en construisant une sphère géodésique autour d'un point, i.e., les points à distance géodésique r (constant) dans toutes les directions.

- ▶ la courbure **de Ricci** correspond à la manière dont cette sphère est agrandie ou rapetissée par rapport à ce qu'elle serait en espace plat : soit globalement (scalaire de Ricci), soit en certaines régions (tenseur de Ricci),
- ▶ la courbure **de Weyl** correspond à la manière dont cette sphère est déformée, sans que sa taille soit changée.

En relativité générale, cela correspond plutôt à envoyer des particules test à toutes les vitesses possibles à partir d'un certain point d'espace-temps, et étudier où elles sont au bout d'une unité de temps propre.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi\kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

- ▶ $R_{\mu\nu}$ (tenseur de Ricci) et R (scalaire de Ricci) représentent la courbure de Ricci,
- ▶ $g_{\mu\nu}$ est la métrique,
- ▶ κ est la constante de Newton,
- ▶ $T_{\mu\nu}$ décrit la densité d'énergie et la pression de la matière,
- ▶ Λ (la *constante cosmologique*) décrit l'effet gravitationnel du vide.

La courbure de Weyl n'est pas directement contrainte par l'équation : elle peut être non-nulle même dans le vide, et c'est elle qui permet la transmission des effets gravitationnels.