Le jeu de nim : thème et variations

Congrès « MATh en JEANS »

David A. Madore
Télécom ParisTech
david.madore@enst.fr

25 mars 2017

http://www.madore.org/~david/math/20170325-mathenjeans.pdf

= goo.gl/yd7Zvn

Git: 45647b8 Fri Mar 24 16:09:53 2017 +0100

Plan

Le jeu de nim

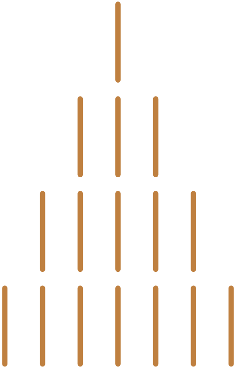
- Le jeu lui-même
- Stratégie gagnante et somme de nim
- Démonstration

...thème...

...et variations !

- Retournements de pièces
- Le produit de nim

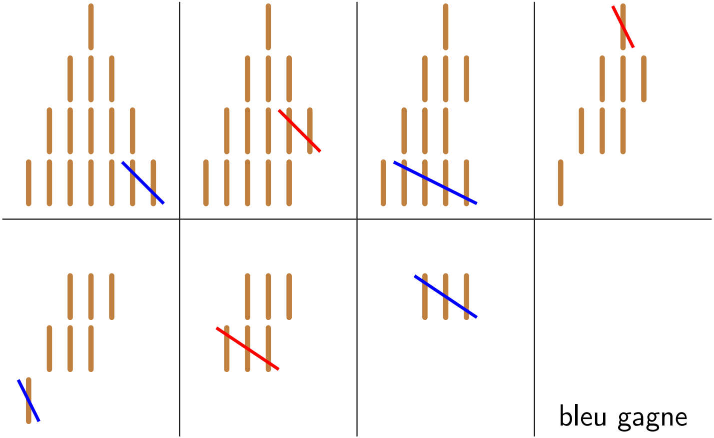
Le jeu de nim



- Des bâtonnets sont disposés en lignes.
- Seul importe le nombre de bâtonnets sur chaque ligne.
- Deux joueurs s'affrontent.
- Chacun à son tour retire autant de bâtonnets qu'il veut (au moins 1)
- ...mais d'une ligne seulement.
- Le gagnant est celui qui prend le dernier (= celui qui ne peut pas jouer perd).
- Disposition initiale standard: $(1, 3, 5, 7)$.

- Variante « misère » : celui qui prend le dernier bâtonnet perd. Mathématiquement moins intéressante. (Apparaît dans *L'année dernière à Marienbad* de Resnais.)

Exemple de partie



$$(1,3,5,7) \rightsquigarrow (1,3,5,5) \rightsquigarrow (1,3,3,5) \rightsquigarrow (1,3,3,1) \rightsquigarrow$$
$$(0,3,3,1) \rightsquigarrow (0,3,3,0) \rightsquigarrow (0,3,0,0) \rightsquigarrow (0,0,0,0)$$

Quel coup était « mauvais » ?

Notion de stratégie gagnante

Cadre théorique : la théorie « combinatoire » des jeux

- à deux joueurs,
- à information parfaite (= sans hasard ni état caché),
- terminant toujours en temps fini,
- impartiaux (= les coups possibles sont les mêmes pour les deux joueurs).

Stratégie : fonction de l'état du jeu déterminant un coup à jouer. **Stratégie gagnante :** stratégie assurant de gagner à coup sûr.

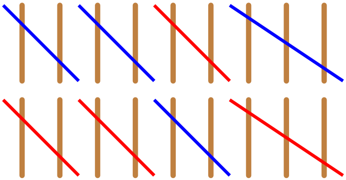
Théorème (E. Zermelo, 1913) : dans tout jeu combinatoire comme ci-dessus, soit le premier joueur possède une stratégie gagnante soit le second joueur en possède une.

En général, on ne peut pas la décrire simplement.

⇒ Toute position [de nim] est gagnante pour le joueur qui va jouer (Next) ou bien pour celui qui vient de jouer (Previous).

Positions évidentes au nim

Dans une position (n, n), le **second joueur** a une stratégie gagnante, consistant à jouer en « **miroir** » :



Quel que soit le coup $(n, n) \rightsquigarrow (m, n)$ (ou $(n, n) \rightsquigarrow (n, m)$), où $m < n$, effectué par le premier joueur, le second réplique par $\rightsquigarrow (m, m)$. Le second joueur peut donc toujours jouer **donc il gagne** (car celui qui ne peut plus jouer perd).

- Les (n, n) sont des positions P (= gagnantes pour le second / précédent joueur).
- Les (n, m) où $m \neq n$ sont N (= gagnantes pour le suivant).

L'écriture binaire

L'écriture **binaire** des nombres fait des paquets de 2, puis de 2×2, etc., là où l'écriture **décimale** usuelle fait des paquets de 10 (=dizaines), puis de 10×10 (=centaines), etc. (ex. : $42 = \mathbf{4} \times 10^1 + \mathbf{2} \times 10^0$).

Puissances de 2 **:** $2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8$, etc.

Tout entier naturel s'écrit de façon unique comme somme de puissances de 2 distinctes.

Exemple : $42 = 32 + 8 + 2 = 2^5 + 2^3 + 2^1 =$
$\mathbf{1} \times 2^5 + \mathbf{0} \times 2^4 + \mathbf{1} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{0} \times 2^0$
On écrira simplement : 101010_2 (ou 00101010_2) pour 42 en binaire.

L'addition en binaire se calcule *comme en décimal* avec une table d'addition très simple !

+	0	1
0	0	1
1	1	10

ex :
$$\begin{array}{rcr} 101010 & = & 42 \\ +\,100110 & & +\,38 \\ \hline 1010000 & = & 80 \end{array}$$

Le 1 de $1 + 1 = 10$ est une **retenue** sur le chiffre à gauche.

La somme de nim (« ou exclusif »)

Une opération encore plus simple : **l'addition binaire sans retenue** :

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

ex :
$$\begin{array}{rcr} 101010 & = & 42 \\ \oplus\, 100110 & & \oplus\, 38 \\ \hline 001100 & = & 12 \end{array}$$

On l'appelle **somme de nim** ou **ou exclusif** (en informatique : XOR, souvent notée ^).

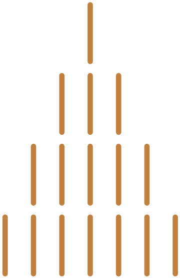
Quelques propriétés :

- commutative : $a \oplus b = b \oplus a$;
- associative : $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c =: a \oplus b \oplus c$;
- 0 est « neutre » : $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$;
- **de 2-torsion** : $a \oplus a = 0$.

▶ Retenir : $a \oplus b = c$ équivaut à $a \oplus b \oplus c = 0$ ou bien $a \oplus c = b$.

La fonction de Grundy du nim

La **valeur de Grundy** d'une position au nim est la somme de nim des nombres de bâtonnets des différentes lignes.



$$
\begin{array}{rcl}
 & 001 & 1 = \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 \\
\oplus & 011 & 3 = \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 \\
\oplus & 101 & 5 = \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 \\
\oplus & 111 & 7 = \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 \\
= & 000 & \leftarrow \text{valeur de Grundy}
\end{array}
$$

(Mettre un 0 quand il y a un nombre pair de 1 dans cette colonne de l'écriture binaire et un 1 quand il y a un nombre impair de 1.)

On va voir que pour gagner il s'agit de jouer pour annuler la valeur de Grundy. C'est la stratégie gagnante.

La stratégie gagnante au nim

Il faut voir deux choses :

- depuis une position où la valeur de Grundy est nulle, tous les coups vont la rendre non-nulle,
- depuis une position où la valeur de Grundy est non-nulle, il y a au moins un coup (« gagnant ») qui la rend nulle.

Alors, si je joue pour annuler Grundy, mon adversaire doit la rendre non-nulle, je peux l'annuler, il doit la rendre non-nulle, etc. Je peux toujours jouer **donc je gagne** (car celui qui ne peut plus jouer perd).

$\Rightarrow$ Une position de Grundy nulle est gagnante pour le joueur qui vient de jouer (Previous) ; sinon, pour le joueur qui doit jouer (Next).

La position initiale $(1, 3, 5, 7)$ est P car $001 \oplus 011 \oplus 101 \oplus 111 = 000$: le second joueur a une stratégie gagnante.

Démonstration de la stratégie (1)

Depuis une position où la valeur de Grundy est nulle, tous les coups vont la rendre non-nulle.

- Soit $(n_1, \ldots, n_\ell)$ une position de nim (où $n_i =$ nombre de bâtonnets sur la ligne i).
- Supposons que sa valeur de Grundy $n_1 \oplus \cdots \oplus n_\ell$ vaut 0.
- On fait un coup sur la ligne j (où $1 \leq j \leq \ell$) : ceci remplace n_j par $n' < n_j$.
- La somme de nim m de tous les n_i <u>sauf</u> n_j vaut : $m = n_j$.
En effet, $m \oplus n_j = n_1 \oplus \cdots \oplus n_\ell = 0$,
...or $m \oplus n_j = 0$ équivaut à $m = n_j$.
- La valeur de Grundy de la nouvelle position vaut donc : $m \oplus n' = n_j \oplus n'$.
- Mais comme $n' \neq n_j$, on a $n_j \oplus n' \neq 0$, cqfd.

Bref : changer une valeur dans une somme de nim change forcément le résultat (qui ici était 0).

Démonstration de la stratégie (2)

Depuis une position où la valeur de Grundy est non-nulle, il y a au moins un coup qui la rend nulle.

- Soit $(n_1, \ldots, n_\ell)$ une position de nim où cette fois $n_1 \oplus \cdots \oplus n_\ell =: k \neq 0$.
- Comme avant, on remplace n_j par $n' < n_j$.
- La somme de nim m de tous les n_i sauf n_j vaut : $m = n_j \oplus k$.
  En effet, $m \oplus n_j = k$ équivaut à $m = n_j \oplus k$.
- La valeur de Grundy de la nouvelle position vaut donc : $m \oplus n' = n_j \oplus n' \oplus k$.
- On cherche à avoir $n_j \oplus n' \oplus k = 0$, ce qui équivaut à : $n' = n_j \oplus k$.

Bref : ceci nous donne n' mais il reste à assurer $n' < n_j$ en choisissant j.

Démonstration de la stratégie (3)

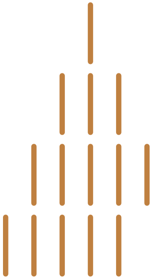
Reste seulement à prouver le lemme :

Si $k = n_1 \oplus \cdots \oplus n_\ell$ n'est pas 0, alors il existe (au moins) un j tel que $n_j \oplus k < n_j$.

- Soit 2^v la plus grande puissance de 2 qui soit $\leq k$: i.e., v est l'indice du 1 le plus à gauche dans l'écriture binaire de k.
- Puisque le v-ième chiffre binaire de k vaut 1, il y a un nombre impair de n_i qui ont cette prop.té. Soit n_j l'un d'eux.
- Alors $n_j \oplus k < n_j$ car le v-ième chiffre binaire passe de 1 (dans n_j) à 0 (dans $n_j \oplus k$) et tous ceux à gauche sont inchangés.

Bref : pour trouver le coup gagnant, on XORe la valeur de Grundy k au nombre n_j de bâtonnets d'une ligne qui a un 1 dans la colonne du 1 le plus à gauche de k en binaire.

Exemple (calcul d'un coup gagnant)



001

$\oplus\, 011$

$\oplus\, 101$

$\oplus\, 101$

$=\, 010$

Ici $n_1 = 1 = 001_2$ et $n_2 = 3 = 011_2$ et $n_3 = 5 = 101_2$ et $n_4 = 5 = 101_2$.

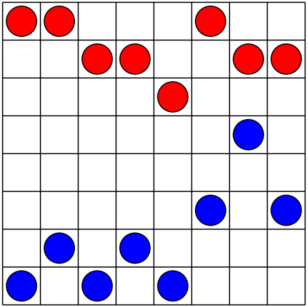
- Grundy $k = 001 \oplus 011 \oplus 101 \oplus 101 = 010$ (soit 2).
- Le 1 le plus à gauche de k est pour $v = 1$ (soit pour 2^1).
- $n_2 = 011$ a un 1 à cet endroit.
- On joue sur la ligne $j = 2$ et on passe de $n_2 = 011 = 3$ bâtonnets à $n' = 011 \oplus 010 = 001 = 1$ (on a bien $1 < 3$: le coup est possible).

Remarques diverses

Rappel : P-position = valeur de Grundy nulle = gagnante pour le joueur qui vient de jouer.

- Pour éviter les calculs en binaire, retenir les P-positions : (n, n), $(1, 1, n, n)$ et $(1, 2m, 2m + 1)$ (notamment $(1, 2, 3)$).
- Le nombre total de bâtonnets dans une P-position est toujours pair (exercice !) : on retire donc un nombre de même parité que l'adversaire.
- Si on doit jouer depuis une P-position, pour perdre le plus lentement possible, retirer 1 bâtonnet depuis une ligne ayant un 1 le plus à *droite* possible en binaire.
- Variante « misère » du nim (= qui-perd-gagne) : les P-positions sont les mêmes qu'à la variante normale sauf si toutes les lignes ont ≤ 1 bâtonnet, auquel cas on inverse.

Un jeu de nim déguisé



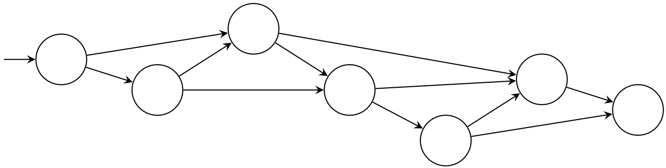
- Un joueur avance les pions bleus vers le haut, l'autre les rouges vers le bas.
- Un pion peut avancer d'autant de cases qu'il veut, en restant sur la même colonne ; pas de prise ni de saut.
- Celui qui ne peut plus jouer a perdu.

- Seul importe l'**espace entre deux pions** sur la même colonne, consommé sous forme de **jeu de nim déguisé**.

Jeux plus généraux ?

Jeux : à deux joueurs, à information parfaite, terminant toujours en temps fini, impartiaux.

Peuvent se voir théoriquement comme un **graphe orienté** (sans cycle) : celui des **positions possibles** du jeu.



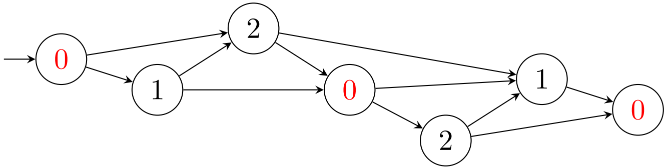
- On part d'un nœud du graphe,
- chaque joueur choisit une arête sortante,
- celui qui ne peut pas jouer a perdu.

Peut-on encore définir une fonction de Grundy ?

Fonction de Grundy générale

Valeur de Grundy d'une position = plus petit entier naturel qui n'est pas la valeur de Grundy d'une position atteignable en un coup à partir de là.

Théorème (« induction bien-fondée ») : cette définition a bien un sens.



Stratégie universelle : jouer vers une position de Grundy nulle (= P-position).

Malheureusement, on sait très rarement calculer explicitement la fonction de Grundy !

Pour le **jeu de nim**, on peut montrer que c'est bien celle qu'on a décrite.

Retour sur la somme de nim

$a \oplus b$ est le plus petit entier naturel qui n'est pas de la forme $a' \oplus b$ pour $a' < a$ ni $a \oplus b'$ pour $b' < b$.

Symboliquement,

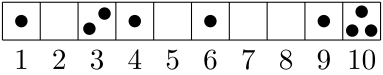
$$a \oplus b = \operatorname{mex}(\{a' \oplus b : 0 \leq a' < a\} \\ \cup \{a \oplus b' : 0 \leq b' < b\})$$

où $\operatorname{mex} S$ (« Minimum EXclu ») = plus petit qui n'est pas dans S.

Exemple : $3 \oplus 1 = \operatorname{mex}\{0 \oplus 1, 1 \oplus 1, 2 \oplus 1, 3 \oplus 0\} = \operatorname{mex}\{1, 0, 3, 3\} = 2$

Définition « inductive » (= « récursive »), très inefficace à calculer, mais sans référence au binaire !

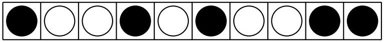
Encore un déguisement du nim



- Des jetons sur des cases, pas de limite sur le nombre de jetons par case.
- Chaque joueur à son tour doit :
  - retirer un jeton, *ou bien*
  - déplacer un jeton vers une case plus à gauche.
- Celui qui retire le dernier jeton gagne (= celui qui ne peut pas jouer perd).

- Équivalent au jeu de nim avec autant de lignes que de jetons, la position des jetons indique le nombre de bâtonnets.
- Si on peut seulement déplacer les jetons, pas les retirer, idem en comptant les cases à partir de 0 (= case-défausse).

Jeux de retournements de pièces



- Chaque case porte une pièce qui peut présenter soit le côté noir (=face, $=1$), soit le côté blanc (=pile, $=0$).
- « Retourner » une pièce = échanger noir et blanc.
- Chaque joueur à son tour va retourner certaines pièces, selon des règles variables.
- Règle commune à tous ces jeux : la pièce retournée *la plus à droite* doit passer de noir à blanc (1 à 0).
- Celui qui ne peut pas jouer perd.

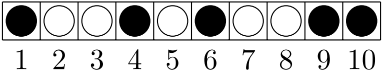
- Le jeu termine en temps fini par la règle commune.

(Le nombre binaire représenté par les 0 et 1 lus de droite à gauche décroît strictement à chaque coup.)

Retournement de ≤ 2 pièces

Le jeu « retourner 1 pièce » est sans intérêt.

- « Retourner ≤ 2 pièces » + règle commune
= retourner 1 pièce de noir à blanc + optionnellement 1 autre située plus à gauche.



Revient encore au jeu de nim !

- Une ligne de n bâtonnets si pièce n est noire.
- Retourner la seule pièce n = retirer toute la ligne.
- Retourner la pièce n et la pièce $n' < n$ = diminuer la ligne de n à n' bâtonnets.
- Se rappeler que deux lignes de m « s'annulent ».

- « Retourner exactement 2 pièces » : pareil en numérotant de 0.

Le code de Hamming binaire

- P-positions (= Grundy 0) au retour$^{\text{t}}$ de ≤ 2 pièces $\cong$nim :

1	2	3	4	5	6	7
●	●	●	○	○	○	○
●	○	○	●	●	○	○
○	●	●	●	●	○	○
○	●	○	●	○	●	○
●	○	●	●	○	●	○

1	2	3	4	5	6	7
●	●	○	○	●	●	○
○	○	●	○	●	●	○
●	●	○	●	○	○	●
○	○	●	●	○	○	●
○	●	○	○	●	○	●

1	2	3	4	5	6	7
●	○	●	○	●	○	●
●	○	○	○	○	●	●
○	●	●	○	○	●	●
○	○	○	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●

- On ne peut pas passer d'une P-position à une autre en tournant 1 ni même 2 pièces.
- Si on tourne 1 pièce dans une P-position, on peut retrouver laquelle grâce à Grundy.

- Les P-positions fournissent un **code correcteur** qui corrige 1 erreur ou détecte 2 erreurs, appelé **code de Hamming binaire**.
- En longueur $2^v - 1$ (ci-dessus 7), il fait passer $2^v - v - 1$ bits d'information par « mot » (ci-dessus 4 : il y a 16 P-positions).

Retournement de $\leq r$ pièces

- Règle du jeu : retourner $\leq r$ pièces + la règle commune (la plus à droite passe de noir à blanc).
- Valeur de Grundy = somme de nim des $f_r(n)$ sur les numéros n des pièces noires (numérotées à partir de 1).
- Si $r = 2$ (retourner ≤ 2 pièces), on a $f_2(n) = n$ (jeu de nim déguisé).
- Que vaut $f_r(n)$ en général ?

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$f_2(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_3(n)$	1	2	4	7	8	11	13	14	16	19
$f_4(n)$	1	2	4	8	15	16	32	51	64	85
$f_5(n)$	1	2	4	8	16	31	32	64	103	128
$f_6(n)$	1	2	4	8	16	32	63	64	128	256
$f_7(n)$	1	2	4	8	16	32	64	127	128	256
$f_8(n)$	1	2	4	8	16	32	64	128	255	256
$f_9(n)$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	511

Retournement de $\leq r$ pièces (suite)

- Rappel : règle du jeu : retourner $\leq r$ pièces + règle commune.
- $f_r(n)$ = valeur de Grundy d'une seule pièce noire en position n.
- V. de Grundy gén.[ale] = somme de nim des $f_r(n)$ sur les pièces noires.
- Que vaut $f_r(n)$?

$$f_r(n) = \operatorname{mex}\{f_r(m_1) \oplus \cdots \oplus f_r(m_s) : m_1, \ldots, m_s < n \text{ et } s < r\}$$

C'est-à-dire : $f_r(n)$ est le plus petit entier naturel qui n'est pas somme de nim $f_r(m_1) \oplus \cdots \oplus f_r(m_s)$ de $s < r$ valeurs de f_r en des $m < n$.

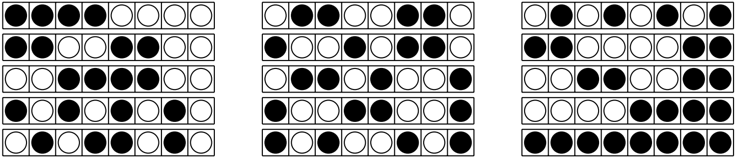
Exemple :
$f_3(3) = \operatorname{mex}\{0, f_3(1), f_3(2), f_3(1) \oplus f_3(1), f_3(1) \oplus f_3(2), f_3(2) \oplus f_3(2)\}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_3(n)$	1	2	4	7	8	11	13	14	16	19
(bin.)	1	10	100	111	1000	1011	1101	1110	10000	10011

Retournement de ≤ 3 pièces

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_3(n)$	1	10	100	111	1000	1011	1101	1110	10000	10011

- P-positions (= Grundy 0) au retourn^{t} de ≤ 3 pièces :



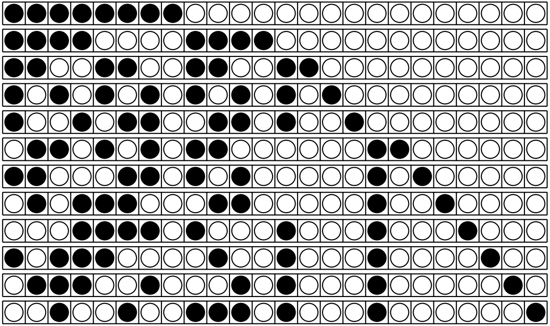
- Si on efface la pièce la plus à gauche, ce sont celles pour le retournement de ≤ 2 pièces ($\cong$nim).
- La pièce la plus à gauche est telle que le nombre total de pièces noires est pair (« parité »).
- **Code de Hamming étendu**

Ici, il aurait mieux valu numéroter à partir de 0.

Le code de Golay binaire étendu

Le cas $r = 7$ est particulièrement remarquable pour 24 pièces.

« Base » des P-positions pour 24 pièces, retourn$^{\text{t}}$ de ≤ 7 :



(Toutes les $4096 = 2^{12}$ P-positions s'obtiennent en combinant ces 12 par XOR=retournement.)

C'est le **code de Golay binaire étendu** de longueur 24 : fait passer 12 bits, corrige 3 erreurs (détecte 7).

Le code de Golay binaire étendu (suite)

(Toujours 24 pièces, retournement de ≤ 7.)
Les 4096 mots du code (:=P-positions) se répartissent en :

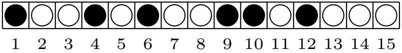
- 1 position « toute blanche »,
- 759 positions avec 8 pièces (une **octade**) noires,
- 2576 positions avec 12 pièces (une **dodécade**) noires,
- 759 positions avec 16 pièces noires, une octade blanche,
- 1 position « toute noire ».

- Cinq pièces quelconques appartiennent toujours à une unique octade (**système de Steiner** $(5, 8, 24)$).

- Il y a $244\,823\,040$ façons de permuter les 24 pièces qui préservent les octades / mots du code : c'est le **groupe de Mathieu** M_{24} (l'un des groupes finis simples sporadiques).

Un jeu plus facile

- Retourner un <u>intervalle</u> de pièces, la plus à droite de noir à blanc (règle commune).



Exemple de coup : retourner les pièces de 7 à 12.

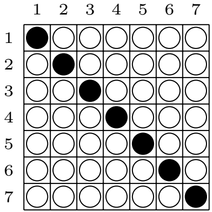
- Valeur de Grundy = somme de nim des $g(n)$ sur les numéros n des pièces noires (comptées à partir de 1).
- Cette fois, $g(n)$ = plus grande puissance de 2 divisant n.
- Autrement dit, une P-position a un nombre <u>pair</u> de :
  - pièces noires de numéro impair,
  - pièces noires de n° multiple de 2 mais pas 4,
  - pièces noires de n° multiple de 4 mais pas 8,
  - pièces noires de n° multiple de 8 mais pas 16, etc.

Stratégie : jouer vers une telle position. Vérification faisable « à l'œil ».

Exercice : démontrer directement cette stratégie !

Un jeu bidimensionnel : nim$\otimes$nim

- Cette fois, on joue sur une <u>grille rectangulaire</u> de pièces :



- Retourner *soit* une pièce, *soit* deux sur une ligne, *soit* deux sur une colonne, *soit* quatre sommets d'un rectangle.
- La plus en bas à droite doit passer de noir à blanc.

Exemple de coup : retourner les pièces $(2,4)$, $(2,6)$, $(6,4)$ et $(6,6)$.

- Celui qui ne peut plus jouer a perdu.

- Le jeu termine en temps fini (exercice !).
- Valeur de Grundy : somme de nim des $a \otimes b$ où (a,b) sont les pièces noires et $\otimes$ est une <u>nouvelle</u> opération, le **produit de nim**.

Le produit de nim

$a \otimes b$ est le plus petit entier naturel qui n'est pas de la forme $(a' \otimes b) \oplus (a \otimes b') \oplus (a' \otimes b')$ pour $a' < a$ et $b' < b$

Symboliquement,

$$a \otimes b = \operatorname{mex}\{(a' \otimes b) \oplus (a \otimes b') \oplus (a' \otimes b') \\ : 0 \leq a' < a\,,\ 0 \leq b' < b\}$$

Quelques propriétés :

- commutative : $a \otimes b = b \otimes a$;
- associative : $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c =: a \otimes b \otimes c$;
- distributive sur la somme de nim : $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$;
- 0 est « absorbant » : $a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0$ (mex vide) ;
- 1 est « neutre » : $a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$;
- existence d'**inverses de nim** : si $a \neq 0$, il existe b (entier naturel !) unique tel que $a \otimes b = 1$.

Calcul du produit de nim

- Note : $2^m \oplus 2^n = 2^m + 2^n$ si $m \neq n$.
- Comme $\otimes$ distribue sur $\oplus$, il suffit de calculer $2^m \otimes 2^n$.
- On a $2^{2^u} \otimes 2^{2^v} = 2^{2^u+2^v}$ si $u \neq v$ (c'est aussi $2^{2^u} \times 2^{2^v}$).

Ainsi, si $n = 2^{u_1} + \cdots + 2^{u_s}$ alors $2^n = 2^{2^{u_1}} \otimes \cdots \otimes 2^{2^{u_s}}$.
Exemple : $4 \otimes 2 = 2^2 \otimes 2^1 = 8$

- Seul cas restant : « carré de nim » $2^{2^u} \otimes 2^{2^u} = \frac{3}{2} \cdot 2^{2^u}$

(s'écrit aussi $2^{2^u} + 2^{2^u-1} = 2^{2^u} \oplus 2^{2^u-1}$).
Exemple : $4 \otimes 4 = 2^2 \otimes 2^2 = 6$

$\otimes$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	3	1	8	10	11	9
3	0	3	1	2	12	15	13	14
4	0	4	8	12	6	2	14	10
5	0	5	10	15	2	7	8	13
6	0	6	11	13	14	8	5	3
7	0	7	9	14	10	13	3	4

Remarques diverses

- On peut faire un jeu tridimensionnel : utiliser les $a \otimes b \otimes c$.
- Produit de jeux de retournements de pièces : (règle commune : la pièce en bas à droite passe de noir à blanc).
  - « Retourner $\leq r$ lignes »$\otimes$« retourner $\leq s$ colonnes » : Grundy est somme de nim des $f_r(a) \otimes f_s(b)$.
  - « Retourner un rectangle » : idem $g(a) \otimes g(b)$.
  - « Retourner un ensemble de lignes et colonnes » : idem $2^{a-1} \otimes 2^{b-1}$. (C'est $a-1$ car numérotation à partir de 1.)

- Les entiers $0 \leq n < 2^{2^u}$ sont stables par $\oplus$ et $\otimes$ et sont un « **corps fini** » pour ces opérations.
- Si $n < 2^{2^u}$, l'inverse de nim de n est sa $(2^u - 1)^{\text{ème}}$ puissance de nim.