

# Le topos effectif

Silvain Rideau

8 février 2010

## Résumé

Quelques notes sur l'article [Hyl82]. Une partie des preuves absentes de l'article sont tirées de [HJP80]

## Table des matières

<b>1 Topoi</b>	<b>2</b>
1.1 Quelques limites . . . . .	2
1.2 Sous-objets et objet des parties . . . . .	5
<b>2 Réalisabilité récursive</b>	<b>7</b>
<b>3 Le topos effectif EFF</b>	<b>10</b>
3.1 Définition . . . . .	10
3.2 Quelques constructions dans EFF . . . . .	12
<b>4 Objet des entiers naturels</b>	<b>13</b>

# 1 Topoi

## 1.1 Quelques limites

On va commencer par introduire quelques définitions générales qui permettront de définir ce qu'est un topos (voir [BW85]). Pour la plupart ce sont des cas particuliers de limites de diagrammes finis. Dans tout ce qui suit  $\mathcal{C}$  est une catégorie.

**Définition 1.1** (Produit fibré) :

Soient  $A, B$  et  $C$  des objets de  $\mathcal{C}$ ,  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$  et  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ . Soit  $P$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $p_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, A)$  et  $p_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, B)$ . On dit que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_1} & A \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

est un produit fibré s'il commute et qu'on a la propriété universelle suivante : si  $(T, t_1, t_2)$  vérifient que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{t_1} & A \\ t_2 \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

commute alors il existe un unique  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, P)$  tel que

$$\begin{array}{ccccc} T & & & & \\ & \searrow^{t_2} & & & \\ & & P & \xrightarrow{p_1} & A \\ & \searrow^{h} & & & \downarrow f \\ & & B & \xrightarrow{g} & C \\ & \swarrow_{t_1} & & & \\ & & & & \end{array}$$

commute.

On parle aussi de produit fibré de  $g$  le long de  $f$  (ou réciproquement).

Le produit fibré de  $(f, g)$  est la limite du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \downarrow f & \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

**Définition 1.2** (objet terminal) :

Soit  $C$  un objet de  $\mathcal{C}$ , on dit qu'il est terminal si pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , il existe une unique flèche de  $A$  dans  $C$ .

Les objets terminaux sont les limites du diagramme vide.

**Définition 1.3** (Égalisateur) :

Soient  $A$  et  $B$  des objets de  $\mathcal{C}$ ,  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ . Soit  $E$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $e \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, A)$ . On dit que  $(E, e)$  est un égalisateur de  $(f, g)$  si  $f \circ e = g \circ e$  et si pour tout  $T$  objet de  $\mathcal{C}$  et  $t \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, A)$  tel que  $f \circ t = g \circ t$  alors il existe un unique  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, E)$  tel que  $t = e \circ h$ .

L'égalisateur de  $f$  et  $g$  est la limite du diagramme

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{f} \end{array} B$$

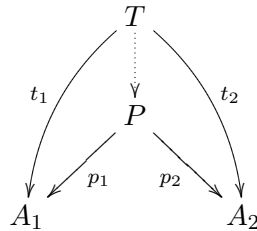
Un égalisateur est un cas particulier de produit fibré où  $U = V$ .

**Définition 1.4** (Produit) :

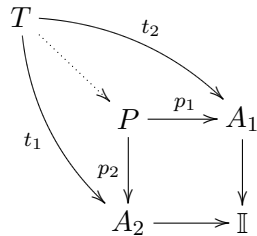
Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $\mathcal{C}$ . Soit  $P$  un objet de  $\mathcal{C}$  et pour tout  $i \in I$ ,  $p_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, A_i)$ . On dit que  $(P, (p_i)_{i \in I})$  est le produit de  $(A_i)_{i \in I}$  si pour tout  $T$  objet de  $\mathcal{C}$  et tous  $t_i \in \text{Hom}(T, A_i)$  pour  $i \in I$ , il existe un unique  $h$  tel que pour tout  $i \in I$ ,  $p_i \circ h = t_i$ .

Le produit est la limite du diagramme discret des  $(A_i)_{i \in I}$ .

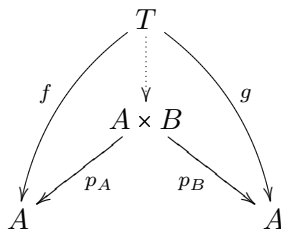
Dans le cas particulier où  $I = \{1; 2\}$  on obtient la propriété universelle suivante



C'est alors aussi un cas particulier de produit fibré si la catégorie a un objet terminal  $\mathbb{I}$  :



On notera  $A \times B$  le produit de  $A$  et  $B$  (en sous-entendant les projections  $(p_A$  et  $p_B)$ ) et  $(f, g) : T \rightarrow A \times B$  la flèche universelle qui vérifie le diagramme



On prendra les même notations pour tous les produits.

**Définition 1.5** (Monomorphisme) :

Soit  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , on dit que  $f$  est un monomorphisme si pour tous  $x, y \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ,  $f \circ x = f \circ y$  implique  $x = y$  ( $f$  est donc régulier à gauche).

Le lemme suivant permet de relier la notion de monomorphisme à celle de produit fibré, plus précisément de donner une définition alternative qui fasse intervenir un produit fibré.

**Lemme 1.6** (Caractérisation des monomorphismes par un produit fibré) :

$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  est un monomorphisme ssi le diagramme suivant est un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{id}_A} & A \\ \text{id}_A \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

$\Delta$ . Soient  $T$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $x, y \in \text{Hom}(T, A)$ .

( $\Rightarrow$ ) Supposons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{y} & A \\ & \searrow x & \downarrow \text{id}_A \\ & & A \\ & & \downarrow f \\ & & B \end{array}$$

commute. En particulier,  $f \circ x = f \circ y$  donc  $x = y$  et l'un ou l'autre satisfait la propriété universelle. Supposons maintenant que  $h \in \text{Hom}(T, A)$  vérifie

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{y} & A \\ & \searrow h & \downarrow \text{id}_A \\ & & A \\ & \searrow x & \downarrow f \\ & & B \end{array}$$

On a alors, par commutativité,  $x = \text{id}_A \circ h = h = y$ . Le carré est donc bien un produit fibré.

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $f \circ x = f \circ y$ . Soit  $h$  vérifiant la propriété universelle. On a alors comme ci-dessus  $x = h = y$ . Donc  $f$  est bien un monomorphisme. □

Énonçons maintenant un théorème sur l'existence des limites finies.

**Théorème 1.7:**

On a équivalence entre

- (i)  $\mathcal{C}$  a toutes les limites finies.
- (ii)  $\mathcal{C}$  a un objet terminal et tous les produits fibrés.
- (iii)  $\mathcal{C}$  a tous les produits finis et tous les égalisateurs.

$\Delta$ .

(i $\Rightarrow$ ii) est évident vu que les objets terminaux et les limites finies sont des cas particuliers de limites finies.

(ii⇒iii) est une conséquence des traductions par des produits fibrés données ci-dessus. Il faudrait encore démontrer qu'on peut construire tout produit fini à partir du produit cartésien seulement (associativité du produit cartésien et isomorphisme entre le produit n-aire et n-1 fois le produit cartésien).

(iii⇒ii) Un objet terminal est le produit d'une famille vide.

Soient  $A, B$  et  $C$  des objets de  $\mathcal{C}$ ,  $f \in \text{Hom}(A, C)$  et  $g \in \text{Hom}(B, C)$  et considérons  $P = A \times C \times B$ ,  $Q = C \times C$ ,  $i = (f \circ p_A, g \circ p_B)$  et  $j = (p_C, p_C)$  appartenant à  $\text{Hom}(P, Q)$ .

Notons  $E$ ,  $e$  l'égalisateur de  $(i, j)$ ,  $e_1 = p_A \circ e$  et enfin  $e_2 = p_B \circ e$ .  $(E, e_1, e_2)$  est alors un produit fibré de  $(f, g)$ .

En effet on a par définition  $i \circ e = j \circ e$  et en projetant sur chacune des composantes de  $C \times C$ , on obtient  $f \circ p_A \circ e = p_C \circ e$  et  $g \circ p_B \circ e = p_C \circ e$ , en particulier,  $f \circ e_1 = g \circ e_2$ . Le carré est donc un carré commutatif. Reste à montrer qu'il vérifie la propriété universelle. Soit  $(T, t_1, t_2)$  tel que  $f \circ t_1 = g \circ t_2$ . la flèche  $t := (t_1, f \circ t_1, t_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, P)$  vérifie que  $i \circ t = j \circ t$ . En effet, en notant  $p_1$  la première projection sur  $C \times C$  et  $p_2$  la deuxième,

$$\begin{aligned} p_1 \circ i \circ t &= f \circ p_A \circ (t_1, f \circ t_1, t_2) \\ &= f \circ t_1 \\ &= p_C \circ (t_1, f \circ t_1, t_2) \\ &= p_1 \circ j \circ t \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_2 \circ i \circ t &= g \circ p_B \circ (t_1, f \circ t_1, t_2) \\ &= g \circ t_2 \\ &= f \circ t_1 \\ &= p_C \circ (t_1, f \circ t_1, t_2) \\ &= p_2 \circ j \circ t \end{aligned}$$

Par propriété universelle du produit cartésien, on a bien  $i \circ t = j \circ t$ . Par propriété universelle de l'égalisateur, on a  $h : T \rightarrow E$  tel que  $t = e \circ h$ . On a alors bien  $e_1 \circ h = p_A \circ e \circ h = p_A \circ t = t_1$  et  $e_2 \circ h = p_B \circ e \circ h = p_B \circ t = t_2$ . C'est donc bien un produit fibré.  $\square$

La preuve donnée ici n'est pas complète, en effet (iii⇒i) n'est pas démontré, mais la preuve suit exactement la même méthode que celle utilisée pour reconstruire le produit fibré.

## 1.2 Sous-objets et objet des parties

**Définition 1.8** (Equivalence de monomorphismes et sous-objets) :

On dit que deux monomorphismes  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$  et  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$  sont équivalents s'il existe  $j : a \rightarrow b$  isomorphisme tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & B \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & C \end{array}$$

soit commutatif (on remarque que c'est une bien une relation d'équivalence).

On notera pour tout  $g$  monomorphisme de codomaine  $C$ ,  $[g]$  la classe d'équivalence de  $g$ . Les sous-objets de  $C$  sont ces classes d'équivalence.

**Définition 1.9** (Foncteur des sous-objets) :

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On définit le foncteur  $\text{Sub} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{SET}$  tel que :

1. quelque soit  $C$  objet de  $\mathcal{C}$ ,  $\text{Sub}(C)$  est l'ensemble des sous-objets de  $C$ .
2. quelque soit  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ , quelque soit  $g : U \rightarrow A$  monomorphisme,  $\text{Sub}(f)([g])$  est la classe d'équivalence d'un produit fibré de  $g$  le long de  $f$ , i.e. tel qu'il existe  $s \in \text{Sub}(f)([g])$ ,  $p$  et  $h$  tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h} & U \\ s \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

soit un produit fibré.

$\Delta$ . Pour que cette définition ait un sens, il faut montrer deux choses :

- (i) Le produit fibré d'un monomorphisme est un monomorphisme.
- (ii) Si  $[g] = [h]$  et  $g'$  (reps.  $h'$ ) produit fibré de  $g$  (resp.  $h$ ) le long de  $f$  alors  $[g'] = [h']$

Pour démontrer le (i), considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} T & & \\ \swarrow x & & \\ \searrow y & & \\ & P & \xrightarrow{h} & U \\ & s \downarrow & & \downarrow g \\ & B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Supposons que  $f \circ x = f \circ y$ . Par commutativité du carré, on a  $g \circ h \circ x = g \circ h \circ y$ . Comme  $g$  est un monomorphisme, on a  $h \circ x = h \circ y$ . Les deux flèches  $x$  et  $y$  vérifient donc la même propriété universelle :

$$\begin{array}{ccc} T & & \\ \swarrow x & & \\ \searrow y & & \\ & P & \xrightarrow{h} & U \\ & s \downarrow & & \downarrow g \\ & B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

$h \circ x = h \circ y$

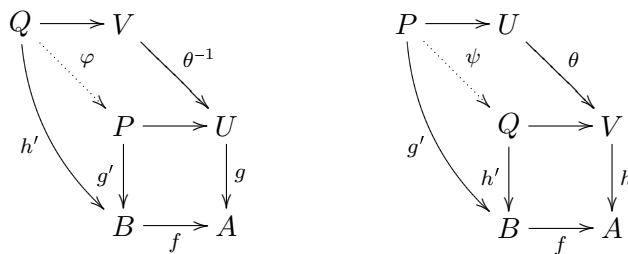
$f \circ x = f \circ y$

On a donc bien  $x = y$ .

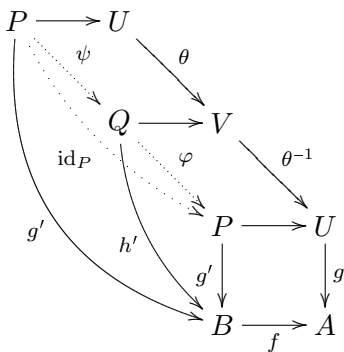
Montrons maintenant le (ii). Comme  $[g] = [h]$ , on a  $\theta$  isomorphisme tel que

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\theta} & V \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ & A & \end{array}$$

Par propriété universelle du produit fibré on a  $\varphi$  et  $\psi$  tels que



On remarque qu'il suffit de démontrer que  $\psi$  est un isomorphisme pour avoir l'équivalence de  $g'$  et  $h'$ , en effet le diagramme voulu est la cellule la plus à gauche du diagramme qui définit  $\psi$ . Mais  $\varphi \circ \psi$  vérifie la même propriété universelle que  $\text{id}_P$  :



On a donc bien  $\varphi \circ \psi = \text{id}_P$ . De façon symétrique  $\psi \circ \varphi = \text{id}_Q$ . □

**Définition 1.10** (Objet des parties) :

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie qui a les produits finis et  $C$  un objet de  $\mathcal{C}$ . On appelle objet des parties de  $C$ , un objet  $\mathcal{P}C$  de  $\mathcal{C}$  tel que pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$  il existe une bijection

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathcal{P}C) \xrightarrow{\varphi^A} \text{Sub}(A \times C)$$

naturelle en  $A$ .

**Définition 1.11** (Topos) :

Une catégorie  $\mathcal{C}$  est un topos si :

1. Elle a toutes les limites finies .
2. Pour tout objet  $C$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{P}C$  existe.

En particulier, d'après le théorème (1.7), il suffit qu'elle ait les produits finis et les égalisateurs où un objet terminal et les produits fibrés.

## 2 Réalisabilité récursive

Le concept à la base de la construction du topos effectif est celui de réalisabilité récursive, qui traduit le fait que certains nombres vérifient certaines propriétés à base de fonctions récursives.

**Définition 2.1** ( $\Sigma$ ) :

On note  $\Sigma$  l'ensemble des parties de  $\mathbb{N}$  muni des opérations internes suivantes

1.  $A \wedge B := \{\langle n, m \rangle \mid n \in A \text{ et } m \in B\}$
2.  $A \vee B := \{\langle 0, n \rangle \mid n \in A\} \cup \{\langle 1, n \rangle \mid n \in B\}$
3.  $A \Rightarrow B := \{e \mid \text{si } n \in A, \text{ alors } e(n) \downarrow \text{ et } e(n) \in B\}$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une fonction récursive de codage des paires (on notera  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les projections associées), et  $e(n)$  est le résultat de la fonction récursive d'indice  $e$  appliquée à  $n$ . On définit aussi les deux constantes

1.  $\top := \mathbb{N}$
2.  $\perp := \emptyset$

**Définition 2.2** (Prédicats non standards) :

Soit  $X$  un ensemble, un prédicat non standard sur  $X$  est un élément de  $\Sigma^X$ . On munit l'ensemble des prédicats non standards des opérations  $\wedge$ ,  $\vee$  et  $\Rightarrow$  définies point par point. Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des prédicats non standards, on a :

1.  $(\varphi \wedge \psi)(x) := \varphi(x) \wedge \psi(x)$
2.  $(\varphi \vee \psi)(x) := \varphi(x) \vee \psi(x)$
3.  $(\varphi \Rightarrow \psi)(x) := \varphi(x) \Rightarrow \psi(x)$
4.  $\top(x) := \top$
5.  $\perp(x) := \perp$

On définit un pré-ordre sur  $\Sigma^X$  par

$$\varphi \vdash_X \psi \text{ si } \bigcap_{x \in X} (\varphi \Rightarrow \psi)(x) \neq \emptyset$$

Enfin on dit qu'un prédicat non standard  $\varphi$  est valide si  $\top \vdash_X \varphi$ .

**Définition 2.3** (Pré-algèbre de Heyting) :

Une catégorie  $\mathcal{C}$  est une pré-algèbre de Heyting si elle a les produits finis, les co-produits finis et est cartésienne close.

**Lemme 2.4 :**

La catégorie associée au pré-ordre  $(\Sigma^X, \vdash_X)$  (i.e. telle qu'il existe un unique morphisme entre  $\varphi$  et  $\psi$  ssi  $\varphi \vdash_X \psi$ ) est une pré-algèbre de Heyting avec  $x \mapsto \mathbb{N}$  comme objet terminal,  $x \mapsto \emptyset$  comme objet initial,  $\wedge$  comme produit cartésien,  $\vee$  comme somme cartésienne et  $\Rightarrow$  comme exponentielle.

**Définition 2.5** (Substitution et quantification) :

Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles et  $f : X \rightarrow Y$ . On définit  $f_* : \Sigma^Y \rightarrow \Sigma^X$ , la substitution selon  $f$  par composition à droite. Cela fait de  $f_*$  un foncteur  $(\Sigma^Y, \vdash_Y) \Rightarrow (\Sigma^X, \vdash_X)$ . Il admet un adjoint à droite  $\forall f : (\Sigma^X, \vdash_X) \Rightarrow (\Sigma^Y, \vdash_Y)$  et un adjoint à gauche  $\exists f : (\Sigma^X, \vdash_X) \Rightarrow (\Sigma^Y, \vdash_Y)$

On notera dans la suite  $p^X : Y \times X \rightarrow Y$  la projection canonique,  $\forall p^X$  sera noté  $\forall x$  et  $\exists p^X$  sera noté  $\exists x$ . Pour ce qui est des substitutions, si  $\varphi$  est un prédicat non standard sur  $Y \times X$  et  $t : Y \times Z \rightarrow X$ , on note  $\varphi[x := t]$  le prédicat non standard, sur  $Y \times Z$ ,  $(t, p^Z)_*(\varphi)$ . On retrouve alors les notations habituelles. Enfin pour pouvoir faire des preuves plus facilement, on va introduire un raisonnement syntaxique sur les prédicats non standards (voir [Cos74])

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\varphi \Vdash_X \varphi} \text{ (axiome)} \qquad \frac{\Gamma \Vdash_X \varphi \quad \varphi, \Gamma' \Vdash_X \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Vdash_X \Delta'} \text{ (\varphi-coupure)} \\
\\
\frac{\Gamma \Vdash_X \Delta}{\Gamma, \varphi \Vdash_X \Delta} \text{ (affaiblissement } \Vdash) \qquad \frac{\Gamma \Vdash_X \Delta}{\Gamma \circ p^Y \Vdash_{X \times Y} \Delta \circ p^Y} \text{ (variables)} \\
\\
\frac{\Gamma, \varphi \Vdash_X \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Vdash_X \Delta} (\wedge_1 \Vdash) \qquad \frac{\Gamma, \psi \Vdash_X \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Vdash_X \Delta} (\wedge_2 \Vdash) \qquad \frac{\Gamma \Vdash_X \varphi \quad \Gamma \Vdash_X \psi}{\Gamma \Vdash_X \varphi \wedge \psi} (\Vdash \wedge) \\
\\
\frac{\Gamma, \varphi \Vdash_X \Delta \quad \Gamma, \psi \Vdash_X \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \Vdash_X \Delta} (\vee \Vdash) \qquad \frac{\Gamma \Vdash_X \varphi}{\Gamma \Vdash_X \varphi \vee \psi} (\Vdash \vee_1) \qquad \frac{\Gamma \Vdash_X \psi}{\Gamma \Vdash_X \varphi \vee \psi} (\Vdash \vee_2) \\
\\
\frac{\Gamma \circ p^X, \varphi \Vdash_{Y \times X} \Delta \circ p^X}{\Gamma, \exists x \varphi \Vdash_Y \Delta} (\exists \Vdash) \qquad \frac{\Gamma \Vdash_{Y \times Z} \varphi[x := t]}{\Gamma \Vdash_{Y \times Z} (\exists x \varphi) \circ p^Z} (\Vdash \exists) \\
\\
\frac{\Gamma, \varphi[x := t] \Vdash_{Y \times Z} \Delta}{\Gamma, (\forall x \varphi) \circ p^Z \Vdash_{Y \times Z} \Delta} (\forall \Vdash) \qquad \frac{\Gamma \circ p^X \Vdash_{Y \times X} \varphi}{\Gamma \Vdash_Y \forall x \varphi} (\Vdash \forall)
\end{array}$$

FIG. 1 – Règles du calcul

**Définition 2.6** (Calcul des séquents sur les prédicats non standards) :

On définit un séquent comme  $\{\Gamma\} \Vdash_X \Delta$  où  $X$  est un ensemble,  $\Gamma$  et  $\Delta$  sont des ensemble de prédicats non standards sur  $X$  tels que  $\Delta$  contienne au plus un élément. On interprète un séquent comme

$$\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \gamma \vdash_X \bigcup_{\delta \in \Delta} \delta$$

On définit la classe des séquents valides comme la plus petite classe close par les règles données à la figure 1, où on note  $\Gamma \circ f$  pour  $\{\gamma \circ f \mid \gamma \in \Gamma\}$ .

Le théorème qui suit indique que ce calcul permet bien de faire des démonstrations correctes. On remarquera d'ailleurs que c'est, à quelque aménagements près dus aux substitutions, la logique intuitioniste. On pourra donc démontrer la validité des prédicats non standards par des raisonnements intuitionistes.

**Théorème 2.7** (Correction du calcul) :

Si un séquent est syntaxiquement valide alors son interprétation est vérifiée.

$\Delta$ . La preuve se fait par induction sur les règles utilisées en montrant que si les prémisses sont valides alors la conclusion est valide.

La plupart des règles sont une simple application du fait que  $(\Sigma^X, \vdash_X)$  est une pré-algèbre de Heyting. Par exemple  $(\Vdash \wedge)$  exprime exactement que  $\wedge$  est un produit. La règle  $(\vee \wedge)$  est un peu plus compliquée, mais traduit simplement le fait que le produit est distributif sur le co-produit, à isomorphisme près. La règle (variables), quant à elle, exprime simplement le fait que  $(p^Y)_*$  est un foncteur.

Les règles vraiment intéressantes sont celles de la quantification, je démontrerais donc la correction des règles gauches (celle des règles droites étant duale (voire plus simple vu que la formule est seule à droite)).

$(\exists \Vdash)$  Supposons  $\bigwedge \gamma \circ p^X \wedge \varphi \Vdash_{Y \times X} \bigvee \delta \circ p^X$ .

Comme  $\Rightarrow$  est l'exponentiation et  $\wedge$  le produit cartésien, on a aussi  $\varphi \vdash_{Y \times X} (\bigwedge \gamma \circ p^X) \Rightarrow (\bigvee \delta \circ p^X)$ . Par définition, comme les opérateurs sont définis point par point, pour tout  $f$ ,  $\varphi \circ f \diamond \psi \circ f = (\varphi \diamond \psi) \circ f$ , pour  $\diamond \in \{\wedge, \vee \Rightarrow\}$ , et donc  $\varphi \vdash_{Y \times X} (\bigwedge \gamma \Rightarrow \bigvee \delta) \circ p^X$ .

Comme  $\exists x$  est l'adjoint à gauche de  $(p^X)_*$ , on a  $\exists x \varphi \vdash_X \bigwedge \gamma \Rightarrow \bigvee \delta$ , et donc  $\bigwedge \gamma \wedge \exists x \varphi \vdash_X$  aussi.

( $\forall \Vdash$ ) Supposons maintenant  $\bigwedge \gamma \wedge \varphi[x := t] \vdash_{Y \times Z} \bigvee \delta$ , ou plus exactement (en explicitant les notations),

$$\bigwedge \gamma \wedge \varphi \circ (t, p^Z) \vdash_{Y \times Z} \bigvee \delta$$

Mais comme  $\forall x \varphi \vdash_Y \forall x \varphi$ , on a  $(\forall x \varphi) \circ p^X \vdash_{Y \times X} \varphi$  et par functorialité de  $(t, p^Z)_*$ ,

$$(\forall x \varphi) \circ p^X \circ (t, p^Z) \vdash \varphi \circ (t, p^Z)$$

Comme  $\wedge$  est un produit cartésien, et que  $p^X \circ (t, p^Z) = p^Z$ , on a  $\bigwedge \gamma \wedge (\forall x \varphi) \circ p^Z \vdash_{Y \times Z} \bigvee \delta$ .  $\square$

### 3 Le topos effectif EFF

#### 3.1 Définition

**Définition 3.1** ( $\Sigma$ -ensemble) :

Un  $\Sigma$ -ensemble est un ensemble muni d'une relation non standard  $\equiv$  telle que

1.  $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$  (symétrique)
2.  $(x \equiv y \wedge y \equiv z) \Rightarrow x \equiv z$  (transitif)

sont valides.

On note  $Ex$  le prédicat non standard  $x \equiv x$ .

**Définition 3.2** (Morphismes de  $\Sigma$ -ensembles, équivalence, composition) :

Soient  $(X, \equiv)$  et  $(Y, \equiv)$  deux  $\Sigma$ -ensembles. Un morphisme de  $\Sigma$ -ensemble est une relation non standard  $F \in \Sigma^{X \times Y}$  telle que

1.  $F(x, y) \Rightarrow (Ex \wedge Ey)$  (stricte)
2.  $(F(x, y) \wedge x \equiv x' \wedge y \equiv y') \Rightarrow F(x', y')$  (relationnelle)
3.  $(F(x, y) \wedge F(x, y')) \Rightarrow y \equiv y'$  (fonctionnelle)
4.  $Ex \Rightarrow \exists y F(x, y)$  (totale)

sont valides.

Soient  $F, G : (X, \equiv) \rightarrow (Y, \equiv)$ , On dit qu'ils sont équivalents si  $F(x, y) \iff G(x, y)$  est valide. On notera  $\overline{F}$  la classe d'équivalence de  $F$ .

Soient  $F : (X, \equiv) \rightarrow (Y, \equiv)$  et  $G : (Y, \equiv) \rightarrow (Z, \equiv)$ , on pose  $G \circ F := \exists y (F(x, y) \wedge G(y, z))$ , élément de  $\Sigma^{X \times Z}$ .

**Lemme 3.3 :**

Si  $F$  et  $G$  sont des morphismes de  $\Sigma$ -ensemble, si  $F(x, y) \Rightarrow G(x, y)$  est valide alors  $G(x, y) \Rightarrow F(x, y)$  aussi. En particulier, monter un sens de l'équivalence suffit pour montrer l'équivalence.

$\Delta$ . Voir figure 2. De façon plus compréhensible, supposons  $G(x, y)$ , On a alors, comme  $G$  est stricte  $Ex$ , donc, comme  $F$  est totale,  $\exists y F(x, y)$ . Soit  $y'$  tel que  $F(x, y')$ , par hypothèse, on a alors  $G(x, y')$ . Mais alors, comme  $G$  est fonctionnelle,  $y \equiv y'$  et comme  $F$  est relationnelle, on a bien  $F(x, y)$ .  $\square$

Comme on peut le voir, cette preuve innocente demande pour être formalisée un peu d'effort, particulièrement à cause de la gestion des variables libres. On se contentera donc dorénavant de donner des preuves informelles (intuitionistes).

**Lemme 3.4** (Propriétés de la composition) :

La relation non standard  $F \circ G$  est un morphisme de  $\Sigma$ -ensembles, de plus la composition est compatible



avec la relation d'équivalence sur les morphismes de  $\Sigma$ -ensembles. De plus, pour tout  $F, \equiv \circ F \circ F \equiv$  sont équivalent à  $F$ .

**Définition 3.5 (EFF) :**

Le topos effectif est la catégorie dont les objets sont les  $\Sigma$ -ensembles et les flèches les classes d'équivalence de morphismes de  $\Sigma$ -ensembles, muni de la composition définie en (3.2).

### 3.2 Quelques constructions dans EFF

**Lemme 3.6 (Objet terminal) :**

Le  $\Sigma$ -ensemble  $\{\star\}$  muni de la relation  $(\star, \star) \mapsto \top$  est terminal dans EFF.

$\Delta$ . La relation définie ici est bien symétrique et transitive, c'est bien donc bien un  $\Sigma$ -ensemble.

Soit  $(X, \equiv)$  un  $\Sigma$ -ensemble. Soit  $F := (Ex) \circ p_X$  relation non standard sur  $X \times \{\star\}$ . Cette relation est bien stricte, car  $Ey$  est valide et  $F(x, \star) \Rightarrow Ex$  est évidemment valide. Elle est relationnelle car  $Ex$  l'est, et elle ne dépend pas de  $y$ . Elle est évidemment fonctionnelle vu que l'ensemble d'arrivé n'a qu'une classe d'équivalence pour  $\equiv$ . Et elle est totale car  $Ex \Rightarrow \exists y Ex$  se déduit de  $Ex \exists Ex$  par la règle ( $\Vdash \exists$ ). Cette formule représente donc une classe de morphismes de  $(X, \equiv)$  dans  $(\{\star\}, \equiv)$ .

Supposons maintenant qu'on ait  $f \in \text{Hom}((X, \equiv), (\{\star\}, \equiv))$  représenté par un prédicat  $F$ . Montrons que  $F(x, y) \iff Ex$ . Comme  $F$  est strict,  $F(x, y) \Rightarrow (Ex \wedge Ey)$  est valide. Comme  $(Ex \wedge Ey) \Rightarrow Ex$  est valide en logique intuitioniste, on en déduit que  $Fx \Rightarrow Ex$ .

D'après le lemme 3.3 on a le résultat voulu, et EFF a bien un objet terminal.  $\square$

**Lemme 3.7 (Produits finis) :**

Le produit de  $(X_i, \equiv)_{i \in I}$  pour  $I$  fini est le sigma ensemble  $\prod_{i \in I} X_i$  muni de la relation  $\bigwedge_{i \in I} x_i \equiv x'_i$ . Pour tout  $i \in I$ , la projection  $p_i$  est représentée par  $Ex_i \circ p_{X_i}$ .

**Lemme 3.8 (Égalisateur) :**

L'égalisateur de  $f$  (représenté par  $F$ ) et  $g$  (représenté par  $G$ ) deux morphismes de  $(X, \equiv)$  dans  $(Y, \equiv)$  est le  $\Sigma$ -ensemble  $(X, \cong)$  où  $x \cong x' := (\exists y F(x, y) \wedge G(x, y)) \wedge (\exists y' F(x', y') \wedge G(x', y')) \wedge x \equiv x'$  muni de  $H(x, y) := E_{\cong} x \wedge x \equiv y$ .

On vient en particulier de montrer que EFF a toutes les limites finies.

**Lemme 3.9 (Produit fibré) :**

Un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} (T, \equiv) & \xrightarrow{\overline{G'}} & (A, \equiv) \\ \downarrow \overline{F'} & & \downarrow \overline{F} \\ (B, \equiv) & \xrightarrow{\overline{G}} & (C, \equiv) \end{array}$$

est un produit fibré ssi

1.  $(F'(t, b) \wedge F'(t', b) \wedge G'(t, a) \wedge G'(t', a)) \Rightarrow t \equiv t'$
2.  $F(a, c) \wedge G(b, c) \Rightarrow \exists t(G'(t, a) \wedge F'(t, b))$

sont valides.

**Lemme 3.10 (Monomorphismes) :**

$\overline{F} \in \text{Hom}((X, \equiv), (Y, \equiv))$  est un monomorphisme ssi  $F(x, y) \wedge F(x', y) \Rightarrow x = x'$  est valide

$\Delta$ . D'après le lemme 1.6, c'est un monomorphisme ssi

$$\begin{array}{ccc} (X, \equiv) & \xrightarrow{\equiv} & (X, \equiv) \\ \downarrow \equiv & & \downarrow \overline{F} \\ (X, \equiv) & \xrightarrow{\overline{F}} & (Y, \equiv) \end{array}$$

est un produit fibré. D'après le théorème précédent, on a donc équivalence avec la validité de

1.  $(t \equiv b \wedge t' \equiv b \wedge t \equiv a \wedge t' \equiv a) \Rightarrow t \equiv t'$
2.  $F(a, c) \wedge F(b, c) \Rightarrow \exists t(t \equiv a \wedge t \equiv b)$

Comme  $\equiv$  est réflexive est transitive, la première est toujours valide et la deuxième est intuitionistement équivalente à la formule voulue.  $\square$

**Lemme 3.11** (Isomorphismes) :

$\overline{F} \in \text{Hom}((X, \equiv), (Y, \equiv))$  est un isomorphisme ssi  $F^s(y, x) := F(x, y)$  est fonctionnelle et totale.

$\Delta$ .  $F^s$  est stricte et relationnelle (ce sont des notions symétriques) donc  $F^s$  est un morphisme de  $\Sigma$ -ensembles.

Soit  $H := F \circ F^s$ , on a alors  $H(y, y') = \exists x F(x, y) \wedge F(x, y')$ , mais comme  $F$  est fonctionnelle, cela implique  $y \equiv y'$ . De plus comme  $F^s$  est totale la réciproque est aussi vraie. Donc  $\overline{H} = \equiv$ . De façon symétrique  $\overline{F^s \circ F} = \equiv$  et  $F$  est bien un isomorphisme.  $\square$

**Lemme 3.12** (Sous-objets) :

Un sous objet de  $(X, \equiv)$  peut être représenté par un monomorphisme (non unique)  $\overline{I} : (X, \cong) \rightarrow (X, \equiv)$  où  $x \cong y := Ax \wedge Ay \wedge x \equiv y$  et  $I(x, y) := Ax \wedge x \equiv y$  pour un certain prédicat non standard  $A$  strict et relationnel.

$\Delta$ . Soit  $\overline{F} : (T, \equiv) \rightarrow (X, \equiv)$  un monomorphisme. Soit  $Ax := \exists y F(y, x)$ , elle est stricte et relationnelle car  $F$  l'est. Notons  $(X \equiv)_A$  le  $\Sigma$ -ensemble défini à partir de  $(X, \equiv)$  et  $A$  comme précédemment et  $I$  la relation associée. Alors  $F$  est un morphisme de  $\Sigma$ -ensembles de  $(T, \equiv)$  dans  $(X \equiv)_A$  dont la classe d'équivalence est un isomorphisme.

D'après le lemme 3.11, il suffit de montrer que  $F^s$  est fonctionnelle et totale (de  $(X \equiv)_A$  dans  $(T, \equiv)$ ). Elle est totale car  $E_A x = Ex \wedge \exists y F(x, y)$  en particulier  $E_A x \Rightarrow \exists y F^s(y, x)$  est valide. Elle est fonctionnelle car  $F$  est un monomorphisme, et la formule donnée au lemme 3.10 est exactement celle cherchée.

## 4 Objet des entiers naturels

**Définition 4.1** (Structure pointée à endomorphisme) :

Soit  $\mathcal{T}$  un topos,  $(A, a, t)$  est une structure pointée à endomorphisme (PE-structure), si  $A$  est un objet de  $\mathcal{T}$ ,  $a \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbb{I}, A)$  est un élément global, et  $t \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, A)$  est un endomorphisme.

Un morphisme de PE-structures,  $f : (A, a, t) \rightarrow (A', a', t')$  est  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, A')$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & A & \xrightarrow{t} & A \\ & \nearrow a & \downarrow f & & \downarrow f \\ \mathbb{I} & & & & \\ & \searrow a' & A' & \xrightarrow{t'} & A' \end{array}$$

commute.

**Définition 4.2** (Objet des entiers naturels) :

Une objet initial  $(\mathbb{N}, 0, S)$  de la catégorie des PE-structures est un objet des entiers naturels.

Il est d'ailleurs amusant de remarquer a quel point cette définition des entiers est proche de celle des entiers de Church.

**Lemme 4.3** (Objet des entiers naturels de EFF) :

Soit  $\mathbb{N}$  le  $\Sigma$ -ensemble muni de  $x \equiv m := \{n\} \cap \{m\}$ . Soit  $O : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{N}$  représenté par  $F_0(n) := n = 0$  et  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  représenté par  $F_S(n, m) := n + 1 \equiv m$ . Alors  $(\mathbb{N}, 0, S)$  est un objet des entiers naturels dans EFF.

$\Delta$ . Soit  $((A \equiv), a, t)$  une PE-structure dans EFF, avec  $a$  représentée par  $F_a$  et  $t$  représenté par  $F_t$ . On défini par récurrence sur  $n$ ,  $G(0, x, x') := x = x'$  et  $G(n+1, x, x') = \exists x'' G(n, x, x'') \wedge F_t(x'', x)$ .  $G$  est alors un prédicat non standard sur  $\mathbb{N} \times A \times A$ . On peut démontrer (par récurrence sur  $n$ ) que  $G(n, -, -)$  est un morphisme de  $\Sigma$ -ensembles et qu'elle est relationnelle en  $n$ .

On définit enfin  $F_f(n, x) := E_n \wedge \exists x' F_a(x') \wedge G(n, x', x)$ . C'est un morphisme de  $\Sigma$ -ensembles. De plus,

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{N} & \xrightarrow{S} & \mathbb{N} \\
 \mathbb{I} & \nearrow 0 & & \downarrow \bar{F} \\
 & \mathbb{N} & & \mathbb{N} \\
 & \downarrow \bar{F} & & \downarrow \bar{F} \\
 & A & \xrightarrow{t} & A
 \end{array}$$

commute. En effet  $\exists n F_0(y, n) \wedge F_f(n, x) \Rightarrow F_a(x)$ , c'est a dire  $\exists n (n \equiv 0 \wedge E_n \wedge \exists x' F_a(x') \wedge G(n, x', x)) \Rightarrow F_a(y, x)$  est valide. Soit  $n$  et  $x'$  tels que  $n \equiv 0 \wedge E_n \wedge F_a(x') \wedge G(n, x', x)$ . Comme  $G$  est relationnelle en  $n$ , on a  $G(0, x', x)$  c'est à dire  $x \equiv x'$ . Comme  $F_a$  est relationnelle, on a donc  $F_a(x)$ , ce qui est le résultat voulu. L'implication réciproque est vérifiée d'après le lemme 3.3.

D'autre part  $\exists x' F_f(n, x') \wedge F_t(x', x) \Rightarrow \exists m F_S(n, m) \wedge F_f(m, x)$ . En effet, soit  $x'$  tel que  $F_f(n, x') \wedge F_t(x', x)$  c'est à dire  $E_n \wedge \exists x'' (F_a(x'') \wedge G(n, x'', x)) \wedge F_t(x', x)$ . Soit  $x''$  tel que  $E_n \wedge F_a(x'') \wedge G(n, x'', x) \wedge F_t(x', x)$ , en particulier on a alors  $G(n+1, x'', x)$  et donc  $F_f(n+1, x)$  de plus  $F_S(n, n+1)$ . Comme l'implication réciproque est vérifiée d'après le lemme 3.3, le diagramme est bien commutatif.

Avant de continuer cette preuve, je voudrais signaler un point que je n'ai pas réussi à résoudre. Si on considère le  $\Sigma$ -ensemble  $\mathbb{N}$  muni de la relation  $x \cong y := \top$  si  $x = y$ ,  $\perp$  sinon, j'ai l'impression que la preuve de la commutativité du diagramme marche de même, pourtant on peut démontrer que tout morphisme de  $(\mathbb{N}, \cong)$  dans  $(\mathbb{N}, \equiv)$  se factorise à travers  $\mathbb{I}$ , i.e. est constant, et donc la portion de droite du diagramme ne peut commuter, car  $n \equiv n+1$  n'est pas valide...

## Références

- [BW85] M. Barr and C. Wells. *Toposes, Triples and Theories*. Springer-Verlag, 1985.
- [Cos74] M. Coste. Logique du premier ordre dans les topos élémentaires. *Séminaire J. Bénabou, 1973-1974*.
- [HJP80] J.M.E. Hyland, P.T. Johnstone, and A.M. Pitts. Tripos theory. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 88 :205–232, 1980.
- [Hyl82] J.M.E Hyland. The effective topos. In *The L.E.J. Brouwer Centenary Symposium*, volume 110 of *Studies in Logic*, pages 165–216. North Holland Publishing Company, 1982.