Silvain Rideau
École Normale Supérieure
L.M.F.I., Paris 7

29 juin 2011

Types stablement dominés, génériquement stables et orthogonaux à Γ

Dans tout ce texte, on se place dans un modèle monstre $\mathfrak{U}$ de la théorie des corps valués algébriquement clos, du moins dans sa version qui admet l'élimination des imaginaires (voir [HHM06]). Comme toujours quand on considère un modèle monstre, tous les ensembles considérés (que ce soient des paramètres ou des modèles) sont de cardinal plus petit que κ tel que $\mathfrak{U}$ soit κ-saturé et κ-fortement homogène. On notera K la sorte du corps valué, R celle du l'anneau de valuation, $\mathfrak{M}$ son idéal maximal, Γ la sorte du groupe de valuation et k la sorte du corps résiduel.

Les types considérés ici sont a priori infinitaires. Il est possible cela m'ait échappé dans certaines preuves, mais en général en utilisant un peu de compacité ou le fait que les formules sont finies, les preuves sur les types finitaires se généralisent facilement aux types infinitaires. De plus quand on considère un type A-définissable, on le considérera toujours canoniquement étendu à $\mathfrak{U}$, et on notera dans tout ce qui suit $B \equiv_A B'$ si $\mathrm{tp}(B/A) = \mathrm{tp}(B'/A)$.

Un certain nombre de résultats présentés ici ne sont pas propres à ACVF mais pour plus de simplicité de présentation, on ne distinguera pas les résultats de théorie des modèles purs de ceux qui sont appliqués aux corps valués algébriquement clos. À vrai dire, la première partie concerne, principalement, toutes les théories, la deuxième les théories NIP et la troisième est spécifique à ACVF.

Enfin, on a choisit de ne pas rentrer dans les détails pour tout ce qui touche à la stabilité. Les résultats utiles seront cités. De même un certain nombre de résultats dont la preuve nécessiterais encore un long développement sont admis.

1 Types stablement dominés

Commençons par rappeler la définition de la stabilité pour une théorie T quelconque qui admet l'élimination des imaginaires.

Définition 1.1 (Stabilité) **:**

Une théorie T est dite λ-stable si pour tout $\mathcal{M} \vDash T$ et tout $C \subseteq M$ tel que $|C| = \lambda$, $|\mathrm{S}(C)| = \lambda$. Elle est dite stable s'il existe λ telle qu'elle soit λ-stable.

On utilisera un peu plus loin une autre caractérisation de la stabilité.

Proposition 1.2 :

Une théorie est stable si pour toute formule $\varphi[x,y]$ à paramètres dans un modèle $\mathcal{M}$, il n'existe pas de a_i, $b_i \in M$ pour $i < \omega$ telle que pour tout $i, j < \omega$, $\mathfrak{U} \vDash \varphi[a_i, b_j]$ si et seulement si $i < j$.

Une formule qui aurait une telle propriété est dite instable.

Définition 1.3 (Plongement stable) **:**

Soit X un ensemble A-définissable dans $\mathfrak{U}$, il est plongé stablement si pour tout ensemble définissable Y et tout $r > 0$, $Y \cap X^r$ est $A \cup X(\mathfrak{U})$-définissable.

Dans le cas des corps valués algébriquement clos, l'élimination des quantificateurs implique que la sorte du corps résiduel k est plongée stablement et que c'est donc un pur corps algébriquement clos.

Définition 1.4 (Ensembles stables) **:**

Soit X un ensemble A-définissable, il est dit stable si la structure $X(\mathfrak{U})$ munie de toutes les relations A-définissables est stable (i.e. sa théorie est stable).

La proposition suivante donne une caractérisation des ensembles stables et plongés stablement qui sera utile pour montrer que St_A est stable. Elle est énoncée dans [HHM08] mais je n'ai pas trouvé d'article où elle soit démontrée.

Proposition 1.5 :

Soit B un ensemble A-définissable alors B est stable et plongé stablement si et seulement si pour tout $\lambda > |T| + |A|$ tel que $\lambda = \lambda^{\aleph_0}$ et $C \supseteq A$ tel que $|C| = \lambda$ alors il y a au plus λ 1-types au dessus de C réalisés dans B.

On peut maintenant définir la structure St_A qui est en quelque sorte la composante stable de $\mathfrak{U}$ au dessus de A.

Définition 1.6 (St_A) **:**

Soit A un petit ensemble de paramètres. On note St_A la structure multi-sorte dont les sortes sont les ensembles A-définissables stables et plongés stablement de $\mathfrak{U}$. On la muni de toutes les relations A-définissables sur un produit fini de tels ensembles.

Pour tout ensemble B, on note $\mathrm{St}_A(B) = \mathrm{dcl}(B) \cap \mathrm{St}_A$.

On remarque que pour tout $a \in \mathrm{acl}(A)$, l'orbite de a est A-définissable, stable et plongée stablement (car fini), il s'en suit que $\mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{St}_A$.

Proposition 1.7 :

Soit A un ensemble de paramètres, alors St_A est une structure stable.

Démonstration. Par la proposition **(1.2)**, il suffit de montrer qu'il n'y a pas de formules instables. Or les formules ont un nombre fini de variables et de paramètres, il suffit donc de montrer que pour tout n et tout $B_1, \ldots, B_n$ sortes de St_A, $B_1 \cup \ldots \cup B_n$ est stable. Par la proposition **(1.5)** il suffit de montrer que pour tout $\lambda > |T|+|A|$ tel que $\lambda = \lambda^{\aleph_0}$ et $C \supseteq A$ tel que $|C| = \lambda$ alors il y a un plus λ 1-types au dessus de C réalisés dans $B_1 \cup \ldots \cup B_n$. Mais comme chacun des B_i est stable et plongé stablement, cette propriété y est vérifiée et comme $\bigcup_{i=1}^{n} \lambda = \lambda$, on a bien ce que l'on veut. □

Un grand nombre d'outils ont été développés pour étudier les théories stbables, en particulier celui de déviation et celui d'indépendance. On notera $C \downarrow_A B$ pour C est indépendant de B a dessus de A. Voici une liste rapide des propriétés de cette indépendance qui sont utilisées ici :

– Si $C \downarrow_A B$ alors $B \downarrow_A C$.
– Si $C \downarrow_A B$ alors pour tout $B' \subseteq B$ on a $C \downarrow_A B'$ (de même à gauche).
– Si $C \downarrow_A B$ alors $C \downarrow_A \mathrm{acl}(B)$ (de même à gauche).
– Si f est un automorphisme de $\mathfrak{U}$ et $C \downarrow_A B$ alors $f(C) \downarrow_{f(A)} f(B)$.

Proposition 1.8 :
Soit T une théorie stable et $p \in \mathrm{S}(\mathfrak{U})$, alors p ne dévie pas au dessus de A si et seulement si p est $\mathrm{acl}(A)$-définissable[1].

Un corollaire immédait de cette proposition est que tout type sur $\mathrm{acl}(A)$ a une unique extension non déviante.

Une suite de Morley d'un type stationnaire $p \in \mathrm{S}(A)$ au dessus de A sens des théories stables est un ensemble indépendant de réalisations de p.

Proposition 1.9 :
Soit T est théorie stable. Une suite de Morley de p au dessus de B est un ensemble indiscernable[2].

On peut maintenant introduire la première des notions centrales à ce texte.

Définition 1.10 (Types stablement dominés) **:**
Un type $p = \mathrm{tp}(a/A)$ est stablement dominé si pour tout B, on a

$$\mathrm{St}_A(a) \downarrow_A \mathrm{St}_A(B) \Rightarrow \mathrm{tp}(B/A\,\mathrm{St}_A(a)) \vdash \mathrm{tp}(B/Aa)$$

Le lemme suivant montre, ce qui est relativement raisonnable, que tout type de St_A est stablement dominé.

Lemme 1.11 :
Soit A, B et C des ensembles de paramètres, alors

$$\mathrm{tp}(\mathrm{St}_A(B)/A\,\mathrm{St}_A(C)) \vdash \mathrm{tp}(\mathrm{St}_A(B)/AC)$$

Démonstration. Soit B' tel que $\mathrm{St}_A(B) \equiv_{A\,\mathrm{St}_A(C)} \mathrm{St}_A(B')$ et $\varphi[x,y,z]$ tel que $\mathfrak{U} \vDash \varphi[\mathrm{St}_A(B),A,C]$. On peut supposer que $\varphi[x,A,C]$ implique une formule stablement dominée ψ quitte à la rajouter. Comme ψ est stablement dominée, l'ensemble défini par $\varphi[x,A,C]$ est St_A-définissable, i.e. il existe $\theta[x,d]$ avec $d \in \mathrm{St}_A$ tel que $\mathfrak{U} \vDash \forall x \theta[x,d] \leftrightarrow \varphi[x,A,C]$. De plus l'ensemble des d qui vérifient cette propriété, défini par la formule $\forall x \forall x \theta[x,y] \leftrightarrow \varphi[x,A,C]$ est AC-définissable. Quitte à remplacer d par le paramètre canonique (i.e. le représentant dans $\mathfrak{U}^{eq} = \mathfrak{U}$ de l'ensemble que

1. Voir théorème 5.1.1 de [Bue96, p. 218].
2. Voir lemme 5.1.14 de [Bue96, p. 231].

l'on vient de définir), l'ensemble $\varphi[x,A,C]$ est $A\,\mathrm{St}_A(C)$ définissable. Comme il contient $\mathrm{St}_A(B)$, il doit contenir $\mathrm{St}_A(B')$, i.e. $\mathfrak{U} \models \varphi[\mathrm{St}_A(B'),A,C]$. □

Lemme 1.12 :

Soit A, B et C des ensembles de paramètres tels que $B \subseteq \mathrm{St}_A$. Si pour tout D tel que $B \downarrow_A \mathrm{St}_A(D)$, on a $\mathrm{tp}(D/AB) \vdash \mathrm{tp}(D/AC)$, alors $\mathrm{tp}(C/A)$ est stablement dominé.

Démonstration. Soit D tel que $\mathrm{St}_A(D) \downarrow_A \mathrm{St}_A(C)$ et $D' \equiv_{A\,\mathrm{St}_A(C)} D$ (on a alors aussi $\mathrm{St}_A(D') \downarrow_A \mathrm{St}_A(C)$), on veut montrer que $D \equiv_{AC} D'$. Montrons qu'on peut supposer que $D' \equiv_{\mathrm{acl}(A)} D$. En effet, soit une formule $\varphi[x,a]$ avec $a \in \mathrm{acl}(A)$ tel que $\mathfrak{U} \models \varphi[D',a]$, soit $a_1,\dots,a_n$ les conjugués de a au-dessus de A et $X = \{a_i : \exists D'' \equiv_{AC} D \wedge \mathfrak{U} \models \varphi[D'',a_i]\}$. Par compacité, il existe une formule de $\mathrm{tp}(D/AC)$ qui définit X. De plus, X est un sous ensemble de $\mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{St}_A$ et donc X est $A\,\mathrm{St}_A(C)$-définissable. En particulier $(\forall y \varphi[x,y] \iff y \in X) \in \mathrm{tp}(D/A\,\mathrm{St}_A(C))$ et est donc aussi vérifiée par D'. On a alors $a \in X$ et il existe $D'' \equiv_{AC} D$ tel que $\varphi[D'',a]$. L'ensemble de formules $\mathrm{tp}(D'/\mathrm{acl}(A)) \cup \mathrm{tp}(D/AC)$ est finiment satisfaisable donc, par compacité, satisfaisable. Soit D'' qui le satisfait, on a alors bien $D'' \equiv_{A\,\mathrm{St}_A(C)} D$ et $\mathrm{St}_A(D'') \downarrow_A \mathrm{St}_A(C)$, et si on montre que $D'' \equiv_{AC} D'$, on aura bien $D \equiv_{AC} D'$. On peut donc supposer $D = D''$.

Soit alors B' une réalisation d'une extension non déviante de $\mathrm{tp}(B/A\,\mathrm{St}_A(C))$ à $A\,\mathrm{St}_A(C)\,\mathrm{St}_A(D)\,\mathrm{St}_A(D')$. On a alors $B' \equiv_{A\,\mathrm{St}_A(C)} B$ et donc par le lemme **(1.11)**, $B' \equiv_{AC} B$. L'hypothèse du lemme est donc aussi vérifiée pour B', en effet, soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/AC)$ tel que $\sigma(B') = B$ et D tel que $\mathrm{St}_A(D) \downarrow_A B'$ alors $\mathrm{St}_A(\sigma(D)) \downarrow_A B$ et donc $\mathrm{tp}(\sigma(D)/AB) \vdash \mathrm{tp}(\sigma(D)/AC)$, on a donc, en appliquant σ^{-1}, $\mathrm{tp}(D/AB') \vdash \mathrm{tp}(D/AC)$. On peut donc supposer $B = B'$ et en particulier $B \downarrow_{A\,\mathrm{St}_A(C)} \mathrm{St}_A(D)\,\mathrm{St}_A(D')$. On a alors par transitivité $B \downarrow_{A\,\mathrm{St}_A(C)} \mathrm{St}_A(D)$, et comme par hypothèse $\mathrm{St}_A(C) \downarrow_A \mathrm{St}_A(D)$, on a donc $\mathrm{St}_A(D) \downarrow_A B$. De même, on a $\mathrm{St}_A(D) \downarrow_A B$. Comme $\mathrm{St}_A(D)$ et $\mathrm{St}_A(D')$ ont le même type au-dessus de $\mathrm{acl}(A)$ et que ce type a une unique extension non déviante, on a $\mathrm{St}_D(A) \equiv_{AB} \mathrm{St}_A(D')$. Soit alors $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$ tel que $\sigma(D) = \sigma(D')$. On a alors $\mathrm{tp}(\sigma(B)/A\,\mathrm{St}_A(D')) = \mathrm{tp}(B/A\,\mathrm{St}_A(D)) = \mathrm{tp}(B/A\,\mathrm{St}_A(D'))$. Par le lemme **(1.11)**, on a donc $\mathrm{tp}(B/AD') = \mathrm{tp}(\sigma(B)/AD') = \mathrm{tp}(B/AD)$, i.e. $D \equiv_{AB} D'$. Par hypothèse on a bien $D \equiv_{AC} D'$. □

Pour finit cette partie, rappelons le théorème 4.9 de [HHM08] qui permet de diminuer la base d'un type tout en conservant la stable domination. Il sera utile pour montrer la proposition **(3.24)**.

Proposition 1.13 :

Soit p et q deux types $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$-invariants tels que pour tout $b \models q|A$, le type $p|Ab$ est stablement dominé, alors $p|A$ est stablement dominé.

2 Types génériquement stables

Dans cette partie, on se place dans le cadre d'un théorie NIP (c'est bien le cas des corps valués algébriquement clos). On commencera par rappeler ce qu'est une théorie NIP et montrer un résultat important sur les suites indiscernables dans une théorie NIP qui sera utile par la suite. Le début de cette partie est très fortement inspiré de [HP].

Définition 2.1 :

Une formule $\varphi[x,y]$ a la propriété d'indépendance si pour tout entier n, il existe $a_0 \ldots a_n$ et pour tout $I \subseteq \{0,\ldots,n\}$, b_I tel que $\mathfrak{U} \vDash \varphi[a_i, b_I]$ si et seulement si $i \in I$.

Une théorie T satisfait NIP si aucune formule n'a la propriété de l'indépendance.

Lemme 2.2 :

Soit T une théorie NIP. Pour toute formule $\varphi[x,y]$, il existe $N < \omega$, tel que si $(a_i : i < \omega)$ est une suite indiscernable, alors il n'existe pas de b tel que $\neg\varphi[a_i, b] \leftrightarrow \varphi[a_{i+1}, b]$, pour $i \leqslant N$.

De plus, si $(a_i : i < \omega)$ est un ensemble indiscernable, alors pour tout b, $|\{i : \mathfrak{U} \vDash \varphi[a_i, b]\}| \leqslant N$ ou $|\{i : \mathfrak{U} \vDash \neg\varphi[a_i, b]\}| \leqslant N$.

Démonstration. Supposons qu'il existe b tel que pour tout $i < \omega$, $\neg\varphi[a_i, b] \leftrightarrow \varphi[a_{i+1}, b]$. Soit alors $n < \omega$ et $I \subseteq \{0,\ldots,n\}$. Il est alors facile de construire $f : \{0,\ldots,n\} \to \omega$ strictement croissante telle que $f(i)$ pair si et seulement si $i \in I$. Procédons par récurrence. Supposons que f soit déjà construit sur $\{0,\ldots k\}$. Soit p le plus petit entier pair strictement supérieur à $f(k)$. Si $k+1 \in I$, on pose $f(k+1) = p$ sinon on pose $f(k+1) = p+1$. On a alors $\mathfrak{U} \vDash \varphi[a_{f(i)}, b]$ si et seulement si $i \in I$. Mais comme $(a_i : i < \omega)$ est une suite indiscernable, soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U})$ tel que $\sigma(a_{f(i)}) = a_i$. On pose alors $b_I = \sigma(b)$ qui vérifie alors bien que $\mathfrak{U} \vDash \varphi[a_i, b_I]$ si et seulement $i \in I$.

L'ensemble de formules

$$\begin{array}{rcl} \Sigma[x, y_i : i < \omega] & = & \{\neg\varphi[y_i, x] \leftrightarrow \varphi[y_{i+1}, x]\} \\ & \cup & \{\psi[y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}] \leftrightarrow \psi[y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}] : i_1 < \ldots < i_n \wedge j_1 < \ldots j_n]\} \end{array}$$

n'est donc pas satisfaisable et par compacité, il n'est donc pas finiment satisfaisable. Il existe donc N tel qu'il n'existe pas de suite indiscernable $(a_i : i < \omega)$ et de b tel que $\neg\varphi[a_i, b] \leftrightarrow \varphi[a_{i+1}, b]$ pour tout $i \leqslant N$.

Si la suite indiscernable est un ensemble indiscernable et qu'il existe b tel que $|\{i : \mathfrak{U} \vDash \varphi[a_i, b]\}| > N$ et $|\{i : \mathfrak{U} \vDash \neg\varphi[a_i, b]\}| > N$. On peut alors construire une injection $f : \{0, \ldots 2N+1\}$ tel que $\mathfrak{U} \vDash \varphi[a_{f(i)}, b]$ si et seulement si i est pair. Comme $(a_i : i < \omega)$ est un ensemble indiscernable, il existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U})$ tel que

$\sigma(a_{f(i)}) = a_i$. Si on pose $b' = \sigma(b)$, on a alors $\neg\varphi[a_i, b'] \leftrightarrow \varphi[a_{i+1}, b']$ pour tout $i \leqslant 2N+1$ ce qui contredit ce qu'on a montré précédemment. □

Définition 2.3 (Types finiment satisfaisables et héritiers) **:**

Soit $p \in \mathrm{S}(B)$ et $\mathcal{M} \subseteq B$ un modèle. On dit que p est finiment satisfaisable dans $\mathcal{M}$ si pour toute formule $\varphi[x,b] \in p$ où $b \in B$ il existe $m \in \mathcal{M}$ tel que $\mathfrak{U} \vDash \varphi[m,b]$.

On dit que p est un héritier de $p|M$ si pour toute formule $\varphi[x,m,b]$ où $m \in M$ et $b \in B$, il existe $b' \in M$ tel que $\varphi[x,m,b'] \in p|M$.

Lemme 2.4 :

Soient $\mathcal{M}$ un modèle, $p \in \mathrm{S}(M)$ et $B \supseteq M$. Il existe alors une extension finiment satisfaisable de p à B.

Démonstration. Considérons l'ensemble de formule

$$\Sigma[x] = p[x] \cup \{\neg\varphi(x,b) : \varphi[\mathcal{M},b] = \varnothing\}$$

Une partie finie de $\Sigma[x]$ est de la forme $\theta[x,m] \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \neg\varphi_i[x,b_i]$. Comme p est un type il est finiment satisfaisable dans M. Soit alors $a \in M$ tel que $\mathcal{M} \vDash \theta[a,m]$. Pour tout i, on a alors $\mathfrak{U} \nvDash \varphi[a,b_i]$ par définition de Σ et donc $\mathfrak{U} \vDash \neg\varphi[a,b_i]$. L'ensemble Σ est donc finiment satisfaisable, et par compacité, satisfaisable. Soit alors $a \vDash \Sigma$ et $q = \mathrm{tp}(a/B)$. On a alors bien $q|M = p$. Soit $\varphi[x,b] \in q$, si $\varphi[M,b] = \varnothing$, on aurait alors $\neg\varphi[x,b] \in \Sigma \subseteq q$ ce qui est absurde. Il existe donc $m \in M$ tel que $\mathfrak{U} \vDash \varphi[m,b]$, i.e. q est une extension de p à B finiment satisfaisable dans $\mathcal{M}$. □

Lemme 2.5 :

Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ des modèles et p un type $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/M)$-invariant tel que p soit finiment satisfaisable dans $\mathcal{N}$, alors p est finiment satisfaisable dans $\mathcal{M}$.

Démonstration. Soit $\varphi[x,c] \in p$ et $q = \mathrm{tp}(N/M)$. Par le lemme **(2.4)**, il existe r une extension finiment satisfaisable de q à Mc. Soit $N' \vDash r$, il existe alors $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/M)$ tel que $\sigma(N) = N'$. Comme p est $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/M)$-invariant, $\varphi[x,\sigma^{-1}(c)] \in p$ et donc il existe $a \in N$ tel que $\mathfrak{U} \vDash \varphi[a,\sigma^{-1}(c)]$. On a alors $\mathfrak{U} \vDash \varphi[\sigma(a),c]$ où $\sigma(a) \in N'$. Comme $\mathrm{tp}(N'/Mc) = r$ est finiment satisfaisable dans M, il existe $b \in M$ tel que $\mathfrak{U} \vDash \varphi[b,c]$. □

Définition 2.6 (Types génériquement stables) **:**

Soit p un type $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$-invariant. On dit que p est génériquement stable s'il est A-définissable et finiment satisfaisable dans tout modèle contenant A.

On va maintenant définir une suite de Morley pour certains types sans avoir recours à la notion d'indépendance, pour donner une définition alternative des types génériquement stables.

Définition 2.7 ($p \otimes q$) **:**

Soient p et q deux types $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$*-invariants, on pose* $\varphi[x,y,m] \in p(x) \otimes q(y)$ *si, pour* $b \models q|Am$, $\varphi[x,b,m] \in p$.

Cette définition a un sens car si b et b' sont deux réalisations de $q|Am$ alors il existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/Am)$ tel que $\sigma(b) = \sigma(b')$. Comme p est $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$ invariant et que $\varphi[x,b,m] \in p$, on a aussi $\varphi[x,b',m] \in p$. La définition ne dépend donc pas du b choisi. Il est alors facile de voir que $p \otimes q$ est clos par $\wedge$ et est donc finiment consistant. De plus comme p est complet $p \otimes q$ l'est aussi car pour tout φ, $\varphi[x,b,m]$ ou $\neg\varphi[x,b,m]$ est dans p. Donc $p \otimes q$ est bien un type.

Lemme 2.8 :

Soient p est q deux types $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$*-invariants alors $p \otimes q$ est aussi* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$*-invariant.*

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$ et $\varphi[x,y,m] \in p \otimes q$. Il existe alors $b \models q|Am$ tel que $\varphi[x,b,m] \in p$. Montrons que $\sigma(b) \models q|A\sigma(M)$. En effet, soit $\psi[y,a,\sigma(m)] \in q|A\sigma(m)$ où $a \in A$. Comme q est $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$-invariant, $\varphi[y,a,m] \in q|Am$ et donc $\mathfrak{U} \models \varphi[b,a,m]$. Il s'ensuit que $\mathfrak{U} \models \varphi[\sigma(b),a,\sigma(m)]$. De plus, comme $\varphi[x,b,m] \in p$ on a $\varphi[x,\sigma(b),\sigma(m)] \in p$ et donc $\varphi[x,y,\sigma(m)] \in p \otimes q$. □

Lemme 2.9 :

Soit p et q des types $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$*-invariants, $B \supseteq A$ et $(a_1,a_2) \models p \otimes q$ si et seulement si $a_2 \models q|B$ et $a_1 \models p|Ba_2$.*

Démonstration. Soit φ telle que $\mathfrak{U} \models \varphi[a_2,B]$, alors $\varphi[x_2,B] \in p(x_1) \otimes q(x_2)|B$ et donc, par définition, $\varphi[b_2,B] \in p(x_1)$ pour un certain $b_2 \models q|AB$. Comme x_1 n'apparaît pas dans cette formule, on a donc $\mathfrak{U} \models \varphi[b_2,B]$ et donc $\varphi[x_2,B] \in q|B$. On en déduit que $a_2 \models q|B$. Soit maintenant φ tel que $\mathfrak{U} \models \varphi[a_1,a_2,B]$, i.e. $\varphi[x_1,x_2,B] \in p \otimes q|B$. Mais alors, par définition $\varphi[x_1,a_2,B] \in p(x_1)|Ba_2$ et donc $a_1 \models p|Ba_2$.

Réciproquement, soit $\varphi[x,y,B] \in p \otimes q|B$, alors $\varphi[x,a_2,B] \in p|Ba_2$ et donc $\mathfrak{U} \models \varphi[a_1,a_2,B]$. □

Définition 2.10 (Suite de Morley) **:**

Soit p un type $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$*-invariant, on note $p^{(1)}(x_1) = p(x_1)$ et pour tout $n < \omega$, $p^{(n+1)}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = p(x_n) \otimes p^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)$. On pose $p^{(\omega)} = \bigcup_{n<\omega} p^{(n)}$ qui est un type complet infinitaire.*

Une suite de Morley de p au-dessus de $B \supseteq A$ est une réalisation $(a_i : i < \omega)$ de $p^{(\omega)}|B$.

Lemme 2.11 :

Soit p un type $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$*-invariant. Toute suite de Morley de p au-dessus de A est une suite indiscernable au-dessus de A.*

Démonstration. Soit $(a_i : i < \omega)$ une suite de Morley de p au-dessus de A et soient $i_1 < \ldots < i_n$, montrons par récurrence sur n que $\mathrm{tp}(a_{i_1} \ldots a_{i_n}/A) = p^{(n)}|A$. Si $n = 0$ c'est évident (avec la convention que $p^{(0)}$ est l'unique 0-type). Sinon supposons que c'est vrai pour $n-1$. Comme $(a_i : i < \omega)$ est une suite de Morley $(a_i : i \leqslant i_n) \vDash p^{(i_n)}|A$. Par le lemme **(2.9)** on sait donc que $a_{i_n} \vDash p|Aa_1a_2 \ldots a_{i_n-1}$ et donc $a_{i_n} \vDash p|Aa_{i_1} \ldots a_{i_{n-1}}$ et par récurrence on sait que $a_{i_1} \ldots a_{i_{n-1}} \vDash p^{(n-1)}|A$. Par le lemme **(2.9)**, on a bien que $\mathrm{tp}(a_{i_1} \ldots a_{i_n}/A) = p^{(n)}|A$. □

On peut maintenant énoncer des définitions équivalentes à la notion de génériquement stable.

Proposition 2.12 :

Soit p un type $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$-invariant, les conditions suivantes sont équivalentes

(i) p est génériquement stable.

(ii) Toute suite de Morley $(a_i : i < \omega)$ de p au-dessus de A est un ensemble indiscernable au-dessus de A.

(iii) Pour toute formule $\varphi[x,y]$ il existe un N tel que pour toute suite de Morley $(a_i : i < \omega)$ de p au-dessus de A et tout c, $\varphi[x,c] \in p$ si et seulement si $\mathfrak{U} \vDash \bigvee_{0 \leqslant i_1 < \ldots < i_N \leqslant 2N} \bigwedge_j \varphi[a_{i_j}, c]$.

Mais commençons par montrer quelques lemmes techniques sur les types finiment satisfaisables, les types définissables et les héritiers qui seront utiles dans la preuve.

Lemme 2.13 :

Soit $\mathcal{M}$ un modèle.

(i) Soit p un type M-définissable et $B \supseteq M$, alors p a un unique héritier à B qui est $p|B$, l'extension canonique de p à B donné par le schéma de définition.

(ii) Soit a, b, c tels que $\mathrm{tp}(a/Mbc)$ soit finiment satisfaisable dans $\mathcal{M}$ et $\mathrm{tp}(c/Mb)$ soit définissable sur M, alors $\mathrm{tp}(ab/Mc)$ est finiment satisfaisable dans $\mathcal{M}$.

(iii) Soient $a, b \in \mathfrak{U}$, $\mathrm{tp}(a/Mb)$ est finiment satisfaisable dans M si et seulement si $\mathrm{tp}(b/Ma)$ est un héritier de $\mathrm{tp}(b/M)$.

Démonstration.

(i) Soit $q \in \mathrm{S}(B)$ héritier de p et $\varphi[x,m,b] \in q$ où $m \in M$ et $b \in B$. Pour tout b' dans $\mathcal{M}$ tel que $\varphi[x,m,b'] \in q$, comme p est M définissable, on a $\mathcal{M} \vDash (d_p x\varphi)[m,b']$. Supposons que $\mathfrak{U} \vDash \neg(d_p x\varphi)[m,b]$, on a alors $\varphi[x,m,b] \wedge \neg(d_p x\varphi)[m,b] \in q$ et comme c'est un héritier, il existe $b' \in M$ tel que

$\varphi[x,m,b'] \wedge \neg(d_p x\varphi)[m,b'] \in q$, ce qui contredit l'observation précédente. On a donc bien $\mathfrak{U} \models (d_p x\varphi)[m,b]$ et $q = p|B$.

(ii) Soit $\varphi[x,y,m,t]$, où $m \in M$, telle que $\mathfrak{U} \models \varphi[a,b,m,c]$, or $\mathrm{tp}(a/Mbc)$ est finiment satisfaisable dans $\mathcal{M}$, il existe donc $a' \in M$ tel que $\mathfrak{U} \models \varphi[a',b,m,c]$. Mais comme $\mathrm{tp}(c/Mb)$ est M-définissable, on a $\mathfrak{U} \models \exists y (d_p t\varphi)[a',y,m]$ et donc il existe $b' \in M$ tel que $\mathcal{M} \models (d_p t\varphi)[a',b',m]$, i.e. $\varphi[a',b',m,t] \in \mathrm{tp}(c/M)$ et donc $\mathfrak{U} \models \varphi[a',b',m,c]$.

(iii) $\mathrm{tp}(a/Mb)$ est finiment satisfaisable si et seulement si pour tout $\varphi[x,y,z]$ tel que $\varphi[x,b,m] \in \mathrm{tp}(a/Mb)$, il existe $a' \in M$ tel que $\mathfrak{U} \models \varphi[a',b,m]$, i.e. $\varphi[a',y,m] \in \mathrm{tp}(b/M)$. Comme $\varphi[x,b,m] \in \mathrm{tp}(a/Mb)$ équivaut à $\varphi[a,y,m] \in \mathrm{tp}(b/Ma)$, cela est bien équivalent au fait que $\mathrm{tp}(b/Ma)$ est un héritier de $\mathrm{tp}(b/M)$. □

Démonstration (Proposition **(2.12)**).

$(i) \Rightarrow (ii)$ Soit M un modèle au-dessus duquel p est défini et finiment satisfaisable. Il suffit de montrer que toute suite de Morley de p au-dessus de M est un ensemble indiscernable. En effet, si $\varphi[x_1,\ldots,x_n] \in p^{(n)}|A \subseteq p^{(n)}|M$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a alors $\varphi[x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}] \in p^{(n)}|M \vdash p^{(n)}|A$ et donc toute suite de Morley au-dessus de A est un ensemble indiscernable.

Soit donc $(a_i : i < \omega)$ une suite de Morley de p sur M. Montrons alors que pour tous $a_{i_1}\ldots a_{i_n}$ distincts extraits de la suite, $\mathrm{tp}(a_{i_1}\ldots a_{i_n}/M) = p^{(n)}|M$. Pour $n = 0$, c'est évident, supposons maintenant que c'est vrai pour $n-1$. Comme $(a_i : i < \omega)$ est une suite indiscernable par le lemme **(2.11)**, il suffit de le montrer pour $a_{\sigma(1)}\ldots a_{\sigma(n)}$ où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Par le lemme **(2.9)** et comme, par récurrence, le type de $a_{\sigma(1)}\ldots a_{\sigma(n-1)}$ est $p^{(n-1)}$, il suffit de montrer que $a_{\sigma(n)}$ réalise $p|M(a_i : i \neq \sigma(n))$.

Comme p est finiment satisfaisable dans M, $\mathrm{tp}(a_{\sigma(n)+1}\ldots a_n/Ma_1\ldots a_{\sigma(n)})$ l'est aussi. En effet, soit φ telle que $\mathfrak{U} \models \varphi[a_1,\ldots,a_n,m]$. Comme a_n réalise $p|Ma_1\ldots a_{n-1}$ il existe $a'_n \in M$ tel que $\mathfrak{U} \models \varphi[a_1,\ldots,a_{n-1},a'_n,m]$. Supposons alors que $a'_n\ldots a'_j$ soient construits tels que $\mathfrak{U} \models \varphi[a_1,\ldots,a_{j-1},a'_j,\ldots,a'_n,m]$, on a alors $\varphi[a_1,\ldots,a_{j-2},x_{j-1},a'_j,\ldots,a'_n,m] \in \mathrm{tp}(a_{j-1}/Ma_1\ldots a_{j-2})$ et donc il existe a'_{j-1} qui convient.

De plus $\mathrm{tp}(a_{\sigma(n)}/Ma_1\ldots a_{\sigma(n)-1}) = p|Ma_1\ldots a_{\sigma(n)-1}$ est M-définissable donc par le lemme **(2.13)**.(ii), $\mathrm{tp}(a_1\ldots a_{\sigma(n)-1}a_{\sigma(n)+1}\ldots a_n/Ma_{\sigma(n)})$ est finiment satisfaisable. Par le lemme **(2.13)**.(iii), $\mathrm{tp}(a_{\sigma(n)}/Ma_i : i \neq \sigma(n))$ est un hériter de $\mathrm{tp}(a_{\sigma(n)}/M) = p|M$ qui est M-définissable. Par le lemme **(2.13)**.(i), $a_{\sigma(n)}$ réalise $p|M(a_i : i \neq \sigma(n))$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ C'est exactement la deuxième partie du lemme **(2.2)**.

$(iii) \Rightarrow (i)$ p est alors clairement définissable, i.e. pour tout $\varphi[x,y]$, l'ensemble $X_\varphi = \{b : \varphi[x,b] \in p\}$ est définissable, mais comme p est $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$-invariant,

X_φ l'est aussi et il est donc A-définissable, c'est à dire que p est A-définissable. De plus, soit $\mathcal{M}$ un modèle qui contient A et $(a_i : i < \omega)$ une suite de Morley de p. au dessus de A Soit alors $\mathcal{N}$ qui contient $\mathcal{M}$ et $(a_i : i < \omega)$. Alors pour tout $\varphi[x, c] \in p$, il existe $i_1 < \ldots < i_n$ tels que $\mathfrak{U} \models \varphi[a_{i_j}, c]$ pour tout j et donc en particulier pour $j = 1$. Donc p est finiment satisfaisable dans $\mathcal{N}$, mais par le lemme **(2.5)** il est finiment satisfaisable dans $\mathcal{M}$. □

Introduisons la notion de pushforward d'un type qui sera utile pour la suite.

Définition 2.14 $(f_* p)$ **:**

Soit p un type et $f = (f_i : i \in I)$ une famille de fonctions définie sur les paramètres du type telle que pour tout i $\mathrm{dom}(f_i) \in p$. Soit $\varphi_i[x, y, m_i]$ qui définit f_i, on peut alors considérer le type

$$f_* p = \{\psi[y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}, m'] : \forall \bar{y} \bigwedge_{j=1}^{n} \varphi_{i_j}[x, y_{i_j}, m_{i_j}] \wedge \psi[\bar{y}, n] \in p\}$$

On remarque que si p et f sont A-définissable alors $f_* p$ est A-définissable.

Lemme 2.15 :

Soit p un type A-définissable génériquement stable, et f une famille de fonctions définissables dont le domaine contient p, alors $f_* p$ est génériquement stable.

Démonstration. Par la proposition **(2.12)**, il suffit de montrer que toute suite de Morley de $f_* p$ est un ensemble indiscernable. De plus, comme le fait que c'est un ensemble indiscernable se voit dans le type de la suite, il suffit de le montrer pour une seule d'entre elles.

Soit alors $(a_i : i < \omega)$ une suite de Morley de p. La suite des $f(a_i)$ est alors une suite de Morley de $f_* p$. Par la proposition **(2.12)**, comme p est génériquement stable, $\{b_i : i < \omega\}$ est un ensemble indiscernable. Mais alors $\{f(b_i) : i < \omega\} = \{a_i : i < \omega\}$ est aussi un ensemble indiscernable. □

Montrons maintenant qu'un type stablement dominé est génériquement stable.

Proposition 2.16 :

Soit p un type $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$*-invariant tel que $p|A$ stablement dominé, alors p est génériquement stable.*

Démonstration. Par le lemme **(2.12)**, il suffit de montrer que toute suite de Morley $(a_i : i < \omega)$ de p au-dessus de A est un ensemble indiscernable au-dessus de A. On pose $a'_i = \mathrm{St}_A(a_i)$, c'est un uplet indexé uniformément en i, par exemple, par la formule qui définit chaque point. En fait on peut considérer $\mathrm{St}_A(\_)$ comme une famille de fonctions $\varnothing$-définissables. Une formule $\varphi[x, a'_1, \ldots, a'_i, a]$, où $a \in A$, appartient au type $\mathrm{tp}(a'_{i+1}/Aa'_1 \ldots a'_i)$ si $\varphi[\mathrm{St}_A(x), \mathrm{St}_A(a_1), \ldots, \mathrm{St}_A(a_i), a]$

appartient au type $\mathrm{tp}(a_{i+1}/Aa_1 \dots a_n) = p|Aa_1 \dots a_n$ qui est A-définissable. Donc $\mathrm{tp}(a'_{i+1}/Aa'_1 \dots a'_i)$ est aussi A-définissable et est donc, par la proposition **(1.8)**, ne dévie pas au-dessus de A. La suite $(a'_i : i < \omega)$ est donc une suite de Morley (au sens des structures stables), et en particulier $\{a_i : i < \omega\}$ est un ensemble indépendant. De plus comme St_A est stable, par la proposition **(1.9)**, $\{a'_i : i < \omega\}$ est un ensemble indiscernable.

Soient $i, j, i_1, \dots, i_n < \omega$ tous distincts. Pour montrer que l'ensemble $\{a_i : i < \omega\}$ est indiscernable, il suffit de montrer que $\mathrm{tp}(a_i/Aa_{i_1} \dots a_{i_n}) = \mathrm{tp}(a_j/Aa_{i_1} \dots a_{i_n})$ (voir la preuve de $(i) \Rightarrow (ii)$ dans la proposition **(2.12)**).

Comme $\{a'_i : i < \omega\}$ est un ensemble A-indiscernable, on a $a'_i \equiv_{Aa'_{i_1} \dots a'_{i_n}} a'_j$ c'est à dire $a'_i \equiv_{A\,\mathrm{St}_A(a_{i_1} \dots a_{i_n})} a'_j$. Soit alors $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$ tel que $\sigma(a_i) = a_j$. Notons $b_{i_k} = \sigma(a_{i_k})$. On a alors $\mathrm{tp}(b_{i_1} \dots b_{i_n}/Aa_j) = \mathrm{tp}(a_{i_1} \dots a_{i_n}/Aa_i)$. En particulier on a

$$\mathrm{tp}(\mathrm{St}_A(b_{i_1} \dots b_{i_n})/Aa'_j) = \mathrm{tp}(\mathrm{St}_A(a_{i_1} \dots a_{i_n})/Aa'_i) = \mathrm{tp}(\mathrm{St}_A(a_{i_1} \dots a_{i_n})/Aa'_j)$$

Par le lemme **(1.11)** on a alors $\mathrm{tp}(\mathrm{St}_A(a_{i_1} \dots a_{i_n})/Aa_j) = \mathrm{tp}(\mathrm{St}_A(b_{i_1} \dots b_{i_n})/Aa_j)$ or ce dernier type est égal à $\mathrm{tp}(\mathrm{St}_A(a_{i_1} \dots a_{i_n})/Aa_i)$, on a donc montré que $a_i \equiv_{A\,\mathrm{St}_A(a_{i_1} \dots a_{i_n})} a_j$ mais alors, comme p est stablement dominé et que les a_i forment un ensemble indépendant, par définition de la stable domination, on a bien que $a_i \equiv_{Aa_{i_1} \dots a_{i_n}} a_j$. □

3 Types orthogonaux à Γ

J'ai choisi de prendre la définition d'orthogonalité à Γ donnée dans [HL] car elle est conceptuellement plus simple. Certes elle ne s'applique qu'aux types définissables mais la proposition 3.13.(i) de [HHM08] montre que ce n'est pas vraiment une restriction (quitte à remplacer A par $\mathrm{acl}(A)$).

Définition 3.1 (Types orthogonaux à Γ) **:**

Soit p un type $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$-invariant. Il est orthogonal à Γ si pour tout modèle $\mathcal{M} \supseteq A$, et tout $a \vDash p|M$, on a $\Gamma(M) = \Gamma(Ma)$ où $\Gamma(X) = \Gamma(\mathfrak{U}) \cap \mathrm{dcl}(X)$.

Lemme 3.2 :

Soit A un ensemble de paramètres et p un type A-définissable, alors $p \perp \Gamma$ si et seulement si pour toute fonction f définissable vers Γ telle que $\mathrm{dom} f \in p$, $f_* p$ est concentré en un point, i.e. $d_{f_* p} x(x = y)$ est réalisable.

Démonstration. Soit f une fonction B définissable et $\mathcal{M} \supseteq A \cup B$ un modèle. Soit $a \vDash p|M$. On a alors $f(a) \vDash f_*(p|A)$. Mais $f(a) \in \Gamma(Ma) = \Gamma(M) \subseteq M$ et donc $\mathcal{M} \vDash d_{f_* p} x(x = f(a))$. Réciproquement, soit $\mathcal{M} \supseteq A$ un modèle et $a \vDash p|M$, comme $\Gamma(M) \subseteq \Gamma(Ma)$, il suffit de montrer que $\Gamma(Ma) \subseteq \Gamma(M)$. Soit $\gamma \in \Gamma(Ma)$, il existe $\varphi[x,y,M]$ telle que $\mathfrak{U} \vDash \varphi[a,\gamma,M]$ et telle que $\mathfrak{U} \vDash \exists^{=1} y\varphi[a,y,M]$. Soit f la fonction définie par $\varphi[x,y,M]$ (de domaine $\exists^{=1} y\varphi[x,y,M]$). Par hypothèse, on a alors $\mathfrak{U}\,\exists y \vDash d_{f_*p}x(x=y)$, mais un tel y est forcément unique sinon f_*p ne pourrait être satisfaisable et comme $\gamma \vDash f_*p$, ce y doit être γ, i.e. $\mathfrak{U} \vDash (d_{f_*p}x(x=y))[\gamma]$, d'où $\gamma \in \mathrm{dcl}(M)$. □

Nous pouvons maintenant montrer l'une des implications.

Proposition 3.3 :
Soit p un type A-définissable génériquement stable, alors $p \perp \Gamma$.

Démonstration. D'après le lemme **(3.2)**, il suffit de montrer que pour toute fonction définissable f vers Γ dont le domaine contient p, f_*p est concentré en un point. Mais comme p est génériquement stable, par le lemme **(2.15)**, f_*p l'est aussi. Mais alors si p n'est pas concentré en un point, une suite de Morley $(a_i : i < \omega)$ de p au-dessus de A contient des éléments tous distincts. En particulier $a_1 \neq a_2$. Mais comme Γ est totalement ordonné, on doit avoir $a_1 < a_2$ ou $a_2 < a_1$. Cette suite ne peut pas être un ensemble indiscernable, ce qui contredit par **(2.12)** que f_*p soit stablement dominé. □

La preuve de la dernière implication nécessite la mise en place d'un certain nombre de concept, en particulier celui d'indépendance séquentielle.

Définition 3.4 (Ensemble unaires) **:**
Soit A un ensemble de paramètres, un 1*-module est un R-module qui est définissablement isomorphe au quotient d'un sous-R-module définissable de K par un autre. Un* 1*-torseur définissable est un translaté définissable d'un* 1*-module. Un* 1*-torseur ∞-définissable est l'intersection d'un chaîne de* 1*-torseurs définissables. Enfin un A-*1*-torseur est un* 1*-torseur définissable (ou ∞-définissable) à partir de paramètres dans A.*

*Une ensemble A-unaire est un A-*1*-torseur ou un sous ensemble A-définissable de Γ de la forme $[0,\alpha)$ où $\alpha \in \Gamma$ ou $\alpha = \infty$.*

Soit T un torseur d'un R-module U, un sous-torseur de T est un torseur inclus dans T d'un sous-module de U. Un sous-ensemble unaire est un sous 1-torseur ou un sous-segment.

Une conséquence immédiate de l'élimination des quantificateurs est la description des sous ensembles définissables des 1-torseurs.

Définition 3.5 (Fromage suisse) **:**
*Soit U un A-*1*-torseur, un fromage suisse de U est un ensemble de la forme $t \backslash (t_1 \cup \ldots \cup t_n)$ où t et les t_i sont des sous-torseurs définissables de U.*

Proposition 3.6 :

Soit U un A-1-torseur et X un sous-ensemble définissable de U alors X est une union de fromages suisses qui ne sont pas trivialement imbriqués et cette décomposition est unique.

Définition 3.7 (Élément générique) **:**

Soit A un ensemble de paramètres, U un ensemble $\operatorname{acl}(A)$*-unaire et $a \in U$. On dit que a est générique dans U au-dessus de A si a n'appartient à aucun sous-ensemble* $\operatorname{acl}(A)$*-unaire propre de U.*

Comme $\mathfrak{M}$ n'est pas d'indice fini dans R, il s'ensuit qu'un 1-torseur n'est pas l'union de finie de sous torseurs stricts. Par compacité on en déduit l'existence d'un élément générique pour tout 1-torseur et donc pour tout ensemble unaire vu qu'un élément générique d'un ensemble de la forme $[0, a)$ est juste un élément plus grand que tout élément définissable.

Corollaire 3.8 :

Soit U un ensemble A-unaire, si a et b sont génériques dans U au-dessus de A alors $a \equiv_A b$.

Démonstration. Soit X un ensemble A-définissable qui contient a mais pas b. Par la proposition **(3.6)**, X est une union finie de fromages suisses, i.e. $X = \bigcup_{i=1}^{n}(t_i \backslash (\bigcup_{j=1}^{m_i} t_i^j))$. Comme cette décomposition est unique, que l'image d'un fromage suisse par un automorphisme est un fromage suisse et que tout automorphisme qui fixe A fixe globalement X, tous les t_i et les t_i^j ont une orbite finie au-dessus de A et donc sont $\operatorname{acl}(A)$-définissables. Une étude des différents cas possibles montre qu'un des t_i et t_i^j ne contient qu'un des deux points a ou b, ce qui contredit la généricité. $\square$

On peut alors parler du type générique de U au-dessus de A.

Définition 3.9 :

Soit U un ensemble A-unaire, le type générique de U au-dessus de A est le type de n'importe quel élément générique dans U au-dessus de A.

On peut aussi introduire une notion d'indépendance dans les corps valués qui remplacera celle de la stabilité.

Définition 3.10 (Indépendance séquentielle) **:**

Soient B et A des ensembles, $a = (a_i)_{i<\alpha}$ un uplet (possiblement transfini) et $U = (U_i)_{i<\alpha}$ une suite d'ensembles. On dit que $a \downfree^g_A B$ via U si pour tout $i < \alpha$, U_i est un ensemble $\operatorname{acl}(Aa_j : j < i)$*-unaire et a_i est générique dans U_i au-dessus de* $\operatorname{acl}(BAa_j : j < i)$*. On autorise le cas dégénéré où $U_i = a_i$, i.e. $a_i \in \operatorname{acl}(Aa_{j<i})$.*

On notera $a \mathop{\downarrow}^{g}_{A} B$ pour il existe U tel que $a \mathop{\downarrow}^{g}_{A} B$ via U. Enfin on dira que $B \mathop{\downarrow}^{g}_{A} C$ via b, U si b $\mathrm{acl}()$-génère B au-dessus de A (i.e. $B = \mathrm{acl}(Ab)$) et $b \mathop{\downarrow}^{g}_{A} C$.

Cette relation d'indépendance vérifie un certain nombre des caractéristiaques d'une « bonne » relation d'indépendance.

Lemme 3.11 :

(i) Soient $A \subseteq B \subseteq C$, on a alors $a \mathop{\downarrow}^{g}_{A} D$ via U si et seulement si $a \mathop{\downarrow}^{g}_{A} B$ via U et $a \mathop{\downarrow}^{g}_{B} C$ via U.

(ii) Soient $a = a_1 a_2$ et $U = U_1 U_2$, alors $a \mathop{\downarrow}^{g}_{A} B$ via U si et seulement si $a_1 \mathop{\downarrow}^{g}_{A} B$ via U_1 et $a_2 \mathop{\downarrow}^{g}_{Aa_1} B$ via U_2.

(iii) Soit f un automorphisme de $\mathfrak{U}$, si $a \mathop{\downarrow}^{g}_{A} B$ alors $f(a) \mathop{\downarrow}^{g}_{f(A)} f(B)$.

Démonstration. Les deux premiers sont des conséquences immédiates de la définition, le troisième provient du fait que les ensembles unaires et la généricité sont préservés par automorphisme. □

Je donne maintenant une série de lemmes sur l'indépendance séquentielle qui seront admis. Je donne pour chacun une référence à [HHM08] où l'on peut en trouver les preuves.

Lemme 3.12 :
Soit $A \subseteq B$ tel que $A = \mathrm{acl}(A)$ et soient a et a' tels que $\mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(a'/A)$, $a \mathop{\downarrow}^{g}_{A} B$ et $a' \mathop{\downarrow}^{g}_{A} B$ alors $\mathrm{tp}(a/B) = \mathrm{tp}(a'/B)$.

Démonstration. Voir théorème 8.12 □

Lemme 3.13 :
Soit $A \subseteq B$ et a un uplet tels que $a \mathop{\downarrow}^{g}_{A} B$, alors $\mathrm{St}_A(\mathrm{acl}(Aa)) \downarrow_A \mathrm{St}_A(B)$.

Démonstration. Voir proposition 8.19 □

Lemme 3.14 :
Soit $C \leqslant A, B$ des corps valués algébriquement clos tels que $\Gamma(C) = \Gamma(A)$, $\mathrm{trdeg}(B/C) = 1$ et il n'y a pas de plongement de B dans A au-dessus de C alors

(i) $\mathrm{tp}(A/C) \cup \mathrm{tp}(B/C) \vdash \mathrm{tp}(AB/C)$.

(ii) Si $B = \mathrm{acl}(Mb)$ alors $b \mathop{\downarrow}^{g}_{C} A$.

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 8.22.(i) et la remarque 8.23 □

L'indépendance séquentielle permet aussi de construire des extension invariantes.

Proposition 3.15 (Existence d'une extension $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$ invariante) **:**

Soit $A = \mathrm{acl}(A)$ *et un modèle* $M \supseteq A$*, alors tout* $p \in \mathrm{S}(A)$ *a une extension* $\mathrm{Aut}(M/A)$*-invariante.*

Démonstration. Voir le corollaire 8.16. Cela dit ce corollaire ne donne que le cas d'un type finitaire. Pour le cas infinitaire, on peut procéder par une récurrence transfinie qui est possible car le corollaire ne donne pas simplement une extension du type d'un uplet mais de sa clôture algébrique, ce qui permet de conserver un ensemble de paramètres algébriquement clos au cours de la récurrence. □

On peut remarquer que quitte à changer de modèle monstre et en prendre un tel que $\mathfrak{U}$ soit un "petit" modèle, on a montré que tout type sur un ensemble algébriquement clos A à un extension $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$-invariante.

On va aussi avoir besoin des notions de base générique et de résolution. Mais pour montrer que la première définition a un sens, on va avoir besoin du lemme suivant. On en trouve une version pour un 1-torseur clos quelconque dans kla remarque 2.3.5.(ii) de [HHM08].

Lemme 3.16 :

Soit a *un élément générique de* k *au-dessus de* A*, alors tous les* $b \in R$ *tels que* $\mathrm{res}(b) = a$ *ont le même type.*

Démonstration. Soit b et c tels que $\mathrm{res}(b) = a = \mathrm{res}(c)$, i.e. en se rappelant que a est un translaté de $\mathfrak{M}$, b et c sont dans a. S'ils n'ont pas le même type sur A, il existe un ense ;ble A-définissable $X \subseteq R$ tel que $b \in X$ et $c \notin X$. Mais alors pour tout a' générique dans k au-dessus de A (on peut en construire une infinité en prenant un élément générique au-dessus de ceux qu'on a déjà construits), il existe b' et c' dans a' tels que $b' \in X$ et $c' \notin X$. Mais cela contredit le fait que X soit A-définissable. En effet on aurait alors $X = \bigcup_{i=1}^{n}(t_i \backslash (\bigcup_{j=1}^{m_i} t_i^j)$ où les t_i et t_i^j sont des translatés de sous-R-modules de R, i.e. des idéaux. Si t_i est un translaté d'un idéal strict de R, il est contenu dans un translaté de $\mathfrak{M}$ et donc ne peut contenir qu'un seul des b'. On doit donc avoir $i = 1$ et $t_1 = R$. Mais pour la même raison on ne peut alors pas éviter tous les c' sans avoir $t_1^j = R$ et donc $X = \varnothing$, ce qui est absurde. □

Définition 3.17 (Base générique) **:**

Soit s *un réseau, tel que* $s \in \mathrm{dcl}(A)$*. Si on note* $\mathrm{res}(s) = s/\mathfrak{M}s$*,* $\mathrm{res}(s)^n$ *est un sous-ensemble définissable de* St_A *qui est définissablement isomorphe à* k^{n^2}*. Comme* k *est une pur corps algébriquement clos, cet ensemble est de degré* 1 *et a donc un type générique* $q_{\mathrm{res}(s)^n} \in \mathrm{S}(\mathfrak{U})$ *qui est l'unique type de rang maximal de l'ensemble. Soit alors* q_s *tel que pour tout* $a_1 \dots a_n$*, on a* $a_1 \dots a_n \vDash q_s$ *si* $\mathrm{res}(a_1)\dots\mathrm{res}(a_n) \vDash q_{\mathrm{res}(s)^n}$ *où* $\mathrm{res}(a_i) = a_i + \mathfrak{M}s$*.*

Soit $B \subseteq A$*, une base générique de* s *au-dessus de* B *est une réalisation de* $q_s|B$*.*

Cette définition a un sens car pour tout i, $\mathrm{res}(a_i)$ est générique au-dessus de $Aa_1 \dots a_{i-1}$ et donc, par le lemme **(3.16)**, tous les choix possibles de a_i ont le même type au-dessus de ces paramètres. De plus comme $q_{\mathrm{res}(s)^n}$ est $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$-invariant, q_s l'est aussi.

Lemme 3.18 :
Soit s un réseau A-définissable. Alors $q_s \perp \Gamma$.

Démonstration. Voir la remarque 3.1.1 de [HHM06]. □

Définition 3.19 (résolution générique fermée) **:**
Soit A un ensemble de paramètres. Une résolution générique fermée de A est un ensemble $B = \mathrm{acl}(Ab_i : i < \lambda)$ ou pour chaque $i < \lambda$, b_i est une base générique au-dessus de $\mathrm{acl}(Ab_j : j < i)$ d'un réseau $\mathrm{acl}(Ab_j : j < i)$-définissable et tel que tout réseau de B à une base dans B.

Lemme 3.20 :
Tout A a une résolution générique fermée.

Démonstration. Soit $\{s_i : i < \lambda\}$ l'ensemble des réseaux A-définissables. On pose b_i une base générique de s_i au-dessus de $\mathrm{acl}(Ab_{j<i})$ et $A_1 = \mathrm{acl}(Ab_{i<\lambda})$. On itère ce processus pour obtenir $(A_i : i < \omega)$ en posant $A_0 = A$. Soit $B = \bigcup_{i<\omega} A_i$, alors B a la forme voulue et de plus tout réseau B définissable est A_i-définissable pour un certain i et a donc une base dans A_{i+1}. □

Définition 3.21 (Résolution canonique ouverte) **:**
Soit $A = \mathrm{acl}(A)$ tel que tout réseau A-définissable ait une base dans A. Soit alors $(\alpha_i : i < \lambda)$ une base de transcendance de $k(A)$ au-dessus de $\mathrm{res}(A)$ et $(\beta_i : i < \lambda)$ tels que $\mathrm{res}(\beta_i) = \alpha_i$. On appelle $\mathrm{acl}(A\beta_i : i < \lambda)$ une résolution canonique ouverte de A.

Lemme 3.22 :
Soit $\mathcal{M}$ un modèle, p un type $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/M)$-invariant tel que $p \perp \Gamma$ et $a \vDash p|M$. Il existe alors p^* un type $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/M)$-invariant sur le corps valué (i.e. les variables du type sont des variables de corps) et $a^* \vDash p|M$ tels que $p^* \perp \Gamma$, $a^* = \mathrm{acl}(Ma^*) \cap K$ et $a \in \mathrm{dcl}(Ma^*)$.

Démonstration. Soit b tel que $\mathrm{acl}(Mab_i : i < \lambda)$ soit une résolution générique close de $\mathrm{acl}(Ma)$. Par définition, $b_i \vDash q_{s_i}|Mab_{j<i}$ pour un certain s_i. Le type $\mathrm{tp}(ab/M)$ a donc une extension $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/M)$ invariante q construite par récurrence à partir de p est des q_{s_i}. On pose $q_0 = p$ et pour tout $i \leqslant \lambda$, pour i limite, on prend $\bigcup_{j<i} q_j$ et si $i = j+1$, $q_i(x, y_{k<i}) = q_{s_j}(y_j) \otimes q_j(x, y_{k<j})$. De plus $q \perp \Gamma$ par une récurrence immédiate et le lemme **(2.9)** car $p \perp \Gamma$ et pour tout i $q_{s_i} \perp \Gamma$, par le lemme **(3.18)**.

Soit alors c tel que $\mathrm{res}(c)$ est une base de transcendance de $k(\mathrm{acl}(Mab))$ au-dessus de $\mathrm{res}\,\mathrm{acl}(Mab)$, i.e. $\mathrm{acl}(Mabc)$ est une résolution canonique ouverte de $\mathrm{acl}(Mab)$. Soit r une extension $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/M)$-invariante de $\mathrm{tp}(abc/M)$ qui soit égale à q pour les variables correspondant à ab. Montrons que $r \perp \Gamma$. Soit $M' \supseteq M$ et $a'b'c' \vDash r|M'$. Alors $\mathrm{tp}(\mathrm{res}(c'a'b')/M')$ est $\mathrm{Aut}(M'/M)$-invariant et donc $\mathrm{tp}(\mathrm{res}(c')/k(M'a'b'))$ est $\mathrm{Aut}(k(M')/k(Ma'b'))$-invariant. Comme k est un pur corps algébriquement clos, donc stable, $\mathrm{tp}(\mathrm{res}(c')/k(M'a'b'))$ est $\mathrm{acl}(Ma'b')$-définissable et donc ne dévie pas au-dessus de $\mathrm{acl}(M'a'b')$, en particulier $\mathrm{res}(c')$ est indépendant de $k(M')$ au-dessus de $k(\mathrm{acl}(Ma'b'))$ et donc c' est une base de transcendance de $k(\mathrm{acl}(M'a'b'))$ au-dessus de $\mathrm{res}(\mathrm{acl}(()M'a'b'))$.

On pose $c' = (c'_i : i < \kappa)$, montrons par récurrence sur i que $\Gamma(M'a'b'c'_{j<i}) = \Gamma(M')$. Comme $a'b' \vDash q|M'$ on a $\Gamma(M'a'b') = \Gamma(M')$. Le cas $i = 0$ est donc traité. Si i est limite et $\gamma \in \Gamma$ est $M'a'b'c'_{j<i}$-définissable alors comme un nombre fini de paramètres suffisent, il existe $k < i$ tel que γ soit $M'a'b'c'_{j<k}$-définissable, et donc par récurrence, M'-définissable. Si $i = k+1$, alors $\mathrm{res}(c'_k)$ est générique dans k au-dessus de $M'a'b'c_{j<k}$ et donc c'_k est une base générique de R au-dessus de $M'a'b'c'_{j<k}$. Par le lemme **(3.18)**, $\Gamma(M'a'b'c'_{j\leqslant k}) = \Gamma(M'a'b'c'_{j<k}) = \Gamma(M')$, la deuxième égalité provenant de la récurrence.

On itère ce processus ω-fois pour obtenir $(b_i c_i : i < \omega)$ et r^ω une extension $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/M)$-invariante de $\mathrm{tp}(a\bar{b}\bar{c}/M)$. Il est alors facile de vérifier qu'on a $r^\omega \perp \Gamma$. Ce type s'étend à une extension de $\mathrm{tp}(\mathrm{acl}(Ma\bar{b}\bar{c})/M)$ et on pose p^* la restriction de ce dernier type aux variables de corps et $a^* = \mathrm{acl}(Mabc) \cap K$. On a bien $a^* \vDash p^*|M$. Montrons que $\mathrm{acl}(Ma\bar{b}\bar{c}) \subseteq \mathrm{dcl}(a^*)$ (l'inclusion inverse est évidente). En effet, soit s un réseau de $\mathrm{acl}(Ma\bar{b}\bar{c})$, alors il existe i tel que $s \in A_i$, où $A_i = \mathrm{acl}(Mab_{j\leqslant i}c_{j<i})$ qui est une résolution générique close et donc s a une base dans $A_i \cap K$, et est donc bien définissable sur $A_i \cap K \subseteq a^*$. D'autre part soit $t \in s/\mathfrak{M}s$ définissable dans $\mathrm{acl}(Ma\bar{b}\bar{c})$, soit alors i tel que $s \in A_i$, cet ensemble contient une base de s d'où s est $A_i \cap K$-définissablement isomorphe à R^n, et donc $s/\mathfrak{M}s$ est $A_i \cap K$-définissablement isomorphe à k^n. De plus $\mathrm{acl}(A_i c_i)$ est une résolution canonique ouverte de A_i et donc tout élément de $k(A_i)^n$ est $\mathrm{acl}(A_i c_i) \cap K$-définissable, en particulier, l'image de t par la bijection. On a donc bien que t est définissable sur $\mathrm{acl}(A_i c_i) \cap K \subseteq a^*$. Enfin, si $\gamma \in \Gamma(\mathrm{acl}(Ma\bar{b}\bar{c}))$, comme tout point d'un ensemble fini C-définissable de Γ est lui même C-définissable (en utilisant l'ordre, on peut dire à quelle position il est dans l'ensemble fini), on a $\gamma \in \Gamma(Ma\bar{b}\bar{c}) = \Gamma(M) \subseteq \mathrm{dcl}(M \cap K) \subseteq \mathrm{dcl}(a^*)$ car $r^\omega \perp \Gamma$.

Finalement, si on a $M' \supseteq M$ et $a^{*\prime} \vDash p^*|M'$, comme $\mathrm{acl}(Ma\bar{b}\bar{c}) = \mathrm{dcl}(a^*)$, il existe $a'\bar{b}'\bar{c}'$ tel que $a'\bar{b}'\bar{c}' \vDash r^\omega|M'$ et $\mathrm{dcl}(a^{*\prime}) = \mathrm{acl}(Ma'\bar{b}'\bar{c}')$, en particulier $\Gamma(M'a^{*\prime}) = \Gamma \cap \mathrm{acl}(M'a'\bar{b}'\bar{c}') = \Gamma(M'a'\bar{b}'\bar{c}') = \Gamma(M')$ comme montré précédemment. $\square$

Le lemme suivant qui sera fondamental pour la preuve de la dernière implication est juste le constat quand dans le cas d'un unique élément de corps, le fait que son type soit perpendiculaire à Γ nous informe déjà beaucoup sur la nature de ce point.

Lemme 3.23 :

Soit p un type $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$-invariant orthogonal à Γ d'un unique élément de corps, alors $p|\mathrm{acl}(A)$ est le type générique d'une boule fermée A-définie.

Démonstration. Soient un modèle $M \supseteq A$ et $a \vDash p$ (on pourrait se contenter de $a \vDash p|M'$ pour M' assez saturé et fortement homogène, mais cela ne coûte rien de prendre $a \vDash p|\mathfrak{U}$ bien que jusqu'ici on ait évité d'en sortir), on pose V l'intersection de toutes les boules M-définissables contenant a, alors V est une boule et a est générique dans V au-dessus de M.

Montrons alors que tout boule B qui contient a est A-définissable. En effet si elle ne l'est pas (comme toutes les boules sont définissables) il existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$ tel que $\sigma(B) \neq B$ mais cela implique $\sigma(B) \cap B = \varnothing$. Or comme p est $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$-invariant, on doit avoir $a \in \sigma(B)$, ce qui est absurde. En particulier a est générique dans V au-dessus de $\mathfrak{U}$ et V est A-définissable.

Montrons finalement que V est fermée. Soit $d \in V(\mathfrak{U})$ (qui existe car V est non vide dans une extension élémentaire de $\mathfrak{U}$) et soit M' qui contient A et d. On a alors bien $a \vDash p|M'$ et comme $p \perp \Gamma$, il s'en suit que $\gamma = |a - d| \in \Gamma(M'a) \subseteq \Gamma(M')$. Donc $a \in B_{\leqslant\gamma}(d) \subseteq V$ qui est M'-définissable, et donc $V = B_{\leqslant\gamma}(d)$. □

Pour finir, montrons enfin la dernière implication.

Proposition 3.24 :

Soit p un type A-définissable tel que $p \perp \Gamma$ alors $p|A$ est stablement dominé.

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer que $p|M$ est stablement dominé pour tout modèle $M \supseteq A$. En effet, soit M un modèle qui contient A et soit q une extension $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$-invariante qui existe d'après la proposition **(3.15)**. Pour tout $M' \vDash q|A$, M' est la base d'un modèle contenant A et donc $p|M'$ est stablement dominé. Donc par la proposition **(1.13)** $p|A$ est stablement dominé. De plus, comme $p|A \perp \Gamma$ implique $p|M \perp \Gamma$ pour tout $M \supseteq A$, on peut supposer que $A = M$.

Soit alors $a \vDash p|M$, p^* et a^* tels que dans le lemme **(3.22)**, il suffit alors de montrer que $p^*|M$ est stablement dominé, i.e. on peut supposer que a est un uplet d'élément du corps tel que $a = \mathrm{acl}(Ma)$ (i.e. que c'est un corps algébriquement clos). En effet, soit D tel que $\mathrm{St}_M(a^*) \downarrow_M \mathrm{St}_M(D)$, on a alors $\mathrm{tp}(D/M\,\mathrm{St}_A(a^*)) \vdash \mathrm{tp}(D/Ma^*) \vdash \mathrm{tp}(D/Ma)$ car $a \in \mathrm{dcl}(Ma^*)$, et donc par le lemme **(1.12)**, $p|M$ est stablement dominé.

Soit alors B tel que $\mathrm{St}_M(a) \downarrow_M \mathrm{St}_M(B)$. Supposons qu'on ait montré que pour tout $B_0 \subseteq B$ fini, on ait $\mathrm{tp}(B_0/M\,\mathrm{St}_M(a)) \vdash \mathrm{tp}(B_0/Ma)$. Soit alors B' tel que

$B' \equiv_{M\,\mathrm{St}_M(a)} B$ et $\varphi[x, M, a]$ tel que $\mathfrak{U} \models \varphi[B, M, a]$. Comme φ est une formule finie, elle ne concerne qu'un certain $B_0 \subseteq B$. Soit B'_0 la partie finie de B' qui correspond à B_0. Comme $B'_0 \equiv_{Ma} B_0$ par hypothèse, on a $\mathfrak{U} \models \varphi[B', m, a]$ et donc $B \equiv_{Ma} B'$, i.e. $\mathrm{tp}(B/M\,\mathrm{St}_M(a)) \vdash \mathrm{tp}(B/Ma)$. Mais comme pour tout $B_0 \subseteq B$ fini, on a $\mathrm{St}_M(a) \downarrow_M \mathrm{St}_M(B_0)$ par monotonie de la relation d'indépendance, on peut supposer B fini.

Soit alors $N = \mathrm{acl}(MB)$ (c'est un corps algébriquement clos). Comme $\mathrm{St}_M(a) \downarrow_M \mathrm{St}_M(B)$, on a $\mathrm{St}_M(a) \downarrow_M \mathrm{acl}(M\,\mathrm{St}_M(B))$ et comme $\mathrm{acl}(\mathrm{dcl}(X)) = \mathrm{acl}(X) = \mathrm{dcl}(\mathrm{acl}(X))$, on a $\mathrm{St}_M(a) \downarrow_M \mathrm{St}_M(N)$ et en particulier comme k est stablement plongé et stable, $k(X) \subseteq \mathrm{St}_M(X)$ et donc, par monotonie, $k(a) \downarrow_M k(N)$, de plus comme k est stablement plongé, tous les ensembles dont on pourrait avoir besoin pour montrer la non déviante (qui sont dans k) sont $k(M)$-définissables et donc $k(a) \downarrow_{k(M)} k(N)$. De plus, il existe $B' \subseteq K$ tel que $B \in \mathrm{dcl}(MB')$ (par le lemme **(3.22)** ou même par un raisonnement plus simple car on ne veut pas contrôler la croissance de Γ). Comme B est fini, on peut prendre B' fini et on a donc $N \subseteq \mathrm{acl}(MB')$ donc N est de degré de transcendance finie sur M.

Montrons alors que si N est un corps de degré de transcendance finie au-dessus de M et que $k(a) \downarrow_{k(M)} k(N)$ alors $N \downarrow^g_M a$. Procédons par récurrence sur n, le degré de transcendance de N au-dessus de M. Si $n = 1$, on a $N = \mathrm{acl}(Mb)$ où $b \in K \setminus M$. Par le lemme **(3.14)**, si N ne se plonge pas dans $\mathrm{acl}(Ma)$ au-dessus de M alors $b \downarrow^g_M \mathrm{acl}(Ma)$ et on a fini. Sinon b se plonge dans $\mathrm{acl}(Ma) \cap K = a$ au-dessus de M et donc si q est la restriction de p à la variable correspondant à b, on a bien $b \models q|M$ et $q \perp \Gamma$. Par le lemme **(3.23)**, b est générique au-dessus de M dans une boule fermée M-définissable. Cette boule fermée est en bijection M-définissable avec $R(\mathfrak{U})$. Il suffit de le montrer dans le cas où b est générique dans $R(\mathfrak{U})$ au-dessus de M (quitte à utiliser la bijection pour transporter les sous modules Ma-définissables). S'il n'était pas générique au-dessus de Ma, il serait dans un translaté de $\mathfrak{M}$ définissable sur a, i.e. $\mathrm{res}\, b \in k(a)$, mais $\mathrm{res}(b) \notin k(M)$ car b est générique dans R au-dessus de M et cela contredirait le fait que $k(N) \downarrow_{k(M)} k(A)$. On a donc montré que $b \downarrow^g_M a$.

Si $n > 0$, soit M' tel que $M \subseteq M' \subseteq N$ et $\mathrm{trdeg}(N/M') = 1$. Par récurrence, $M' \downarrow^g_M a$ et donc par le lemme **(3.13)** on a $\mathrm{St}_M(M') \downarrow_M \mathrm{St}_M(\mathrm{acl}(Ma))$. Comme on a montré précédemment, cela implique que $k(M') \downarrow_{k(M)} k(a)$. Comme k est un pur corps algébriquement clos, l'indépendance est donnée par l'appartenance à la clôture algébrique et comme $k(a) \downarrow_{k(M)} k(N)$ on a $\mathrm{trdeg}(k(M'a)/k(M')) = \mathrm{trdeg}(k(Ma)/k(M)) = \mathrm{trdeg}(k(Na)/k(N))$ et donc $k(a) \downarrow_{k(M')} k(N)$. Par le cas $n = 1$, on a donc $N \downarrow^g_{M'} a$ et donc par transitivité de $\downarrow^g$, on a $N \downarrow^g_M a$.

On en déduit alors que $\mathrm{tp}(N/Mk(a)) \vdash \mathrm{tp}(N/Ma)$. En effet, soit N' tel que $N \equiv_{Mk(a)} N'$, il s'ensuit que N' est un corps de degré de transcendance finie au-dessus de M tel que $k(a) \downarrow_{k(M)} k(N')$. On a alors $N \downarrow^g_M a$ et $N' \downarrow^g_M a$ et donc par le

lemme **(3.12)**, $N \equiv_{Ma} N'$. Comme $k(a) \subseteq \mathrm{St}_M(a)$, on a bien que $\mathrm{tp}(N/M\,\mathrm{St}_M(a)) \vdash \mathrm{tp}(N/Ma)$. On en déduit que $\mathrm{tp}(B/M\,\mathrm{St}_M(a)) \vdash \mathrm{tp}(B/Ma)$. En effet, soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/M\,\mathrm{St}_M(a))$, on a $N \equiv_{M\,\mathrm{St}_A(a)} \sigma(N)$ et donc $N \equiv_{Ma} \sigma(N)$, d'où $B \equiv_{Ma} \sigma(B)$.
□

Conclusion

Récapitulons donc tout ce qu'on a démontré.

Théorème 3.25 :

Soit p un type A-définissable, sont équivalents :

(i) p *est stablement dominé.*

(ii) p *est génériquement stable.*

(iii) $p \perp \Gamma$.

Démonstration. (i) implique (ii) est démontré en **(2.16)**

(ii) implique (iii) est démontré en **(3.3)**.

(iii) implique (i) est démontré en **(3.24)**. □

Bibliographie

[Bue96] Steven Buechler. *Essential Stability Theory*. Perspective in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1996.

[HHM06] Deirdre Haskell, Ehud Hrushovski et Dugald Macpherson. « Definable sets in algebraically closed valued fields : elimination of imaginaries ». Dans : *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 597 (2006), p. 175–236.

[HHM08] Deirdre Haskell, Ehud Hrushovski et Dugald Macpherson. *Stable domination and independance in algebraically closed valued fields*. Association for Symbolic Logic. Lecture Notes in Logic 30. Cambridge University Press, 2008.

[HL] Ehud Hrushovski et François Loeser. « Non-archimedean tame topology and stably dominated types ». arXiv : 1009.0252.

[HP] Ehud Hrushovski et Anand Pillay. « On NIP and invariant measures ». arXiv : 0710.2330.

Table des matières