Travaux dirigés - Autour des quasi-cristaux - Correction

Alexis Poncet - GICS - 12 novembre 2014

1 Empilement compact de sphères

1. (a) Sur chacun des huit sommet du cube, il y a un atome. En considérant des cubes identiques qui se touchent, chaque atome est partagé par 8 cubes. La proportion d'atomes dans le cube est donc $N = 8 \times \frac{1}{8} = 1$.

   (b) Deux atomes voisins (rayon R) se touchent par une arrête du cube (longueur a), on a immédiatement $a = 2R$.

   (c) Le volume d'une sphère est $V_{sphère} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}a^3$. Le volume du cube est $V_{cube} = a^3$. On a donc $C = \frac{NV_{sphère}}{V_{cube}} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$.

2. (a) On a un atome de plus dans le cube par rapport au cas précédent : $N = 2$.

   (b) La diagonale du cube a pour longueur $a\sqrt{3}$. Deux atomes sur des sommets opposés (rayon R) touchent l'atome central (diamètre $2R$). On a donc $a\sqrt{3} = 4R$.

   (c) $V_{sphère} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{16}\pi a^3$ donc $C = \frac{NV_{sphère}}{V_{cube}} = \frac{\sqrt{3}}{8}\pi \approx 0,68$.
   C'est déjà un peu mieux que la structure cubique simple

3. (a) Il y a 8 atomes dans les coins, qui sont partagés par 8 cubes ; et 6 atomes sur les face, qui sont partagés par 2 cubes. On a donc $N = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$.

   (b) La diagonale d'une face a pour longueur $a\sqrt{2}$. Deux atomes en diagonale sur une face (rayon R) touchent l'atome au centre de la face (diamètre $2R$). On a donc $a\sqrt{2} = 4R$.

   (c) $V_{sphère} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^3 = \frac{\pi}{12\sqrt{2}}a^3$ donc $C = \frac{NV_{sphère}}{V_{cube}} = \frac{\sqrt{2}}{6}\pi \approx 0,74$.
   La structure cubique faces centrées est donc plus compacte que les deux précédentes.
   Il a été démontré que c'est la plus compacte des structures possibles.
   Vérifier que parmi les trois structures proposées, la structure cubique faces centrées est aussi celle pour laquelle le nombre de voisins de chaque atome est le plus grand (12 au lieu de 6 et 8).

2 Démonstration d'un théorème important

Pour avoir une meilleure intuition de ce que l'on fait, on peut considérer le pavage du plan par des triangles équilatéraux. On prend pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs correspondant à deux côtés d'un triangle équilatéral. On s'apperçoit qu'une rotation R d'angle $\theta = 60\,^\circ$ laisse le pavage inchangé. Et on a $R(\vec{u}) = \vec{v}$ et $R(\vec{v}) = -\vec{u} + \vec{v}$. C'est-à-dire $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 1$.

1. $\vec{u} = \|\vec{u}\|\,\vec{i}$
   $\vec{v} = \|\vec{v}\|\,(\cos\phi\,\vec{i} + \sin\phi\,\vec{j})$ en considérant un triangle rectangle d'hypothénuse $\|\vec{v}\|$ ayant un angle égal à ϕ.

2. $\vec{u} = \|\vec{u}\|\,\vec{i}$ donne immédiatement $\vec{i} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$
   $\vec{v} = \|\vec{v}\|\,(\cos\phi\,\vec{i} + \sin\phi\,\vec{j}) = \|\vec{v}\|\left(\cos\phi\,\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin\phi\,\vec{j}\right)$ et après calcul : $\vec{j} = \dfrac{1}{\sin\phi}\left(-\dfrac{\cos\phi\,\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)$

3. Comme à la question 1 : $R(\vec{u}) = \|\vec{u}\|\left(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right)$ et $R(\vec{v}) = \|\vec{v}\|\left(\cos(\theta+\phi)\,\vec{i} + \sin(\theta+\phi)\,\vec{j}\right)$

4. On injecte violamment les résultats de la question 2 dans ceux de la question 3 en se rappellant que $\tan\phi = \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$.
   $$R(\vec{u}) = \|\vec{u}\|\left(\cos\theta\,\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\sin\theta}{\sin\phi}\left(-\frac{\cos\phi\,\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)\right) = \underbrace{\left(\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\tan\phi}\right)}_{a}\vec{u} + \underbrace{\left(\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\frac{\sin\theta}{\sin\phi}\right)}_{b}\vec{v}$$
   $$\begin{aligned} R(\vec{v}) &= \|\vec{v}\|\left(\cos(\theta+\phi)\,\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}\left(-\frac{\cos\phi\,\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)\right) \\ &= \underbrace{\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}\left(\cos(\theta+\phi) - \frac{\sin(\theta+\phi)\sin\theta}{\sin\phi}\right)}_{c}\vec{u} \;+\; \underbrace{\left(\frac{\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}\right)}_{d}\vec{v} \end{aligned}$$

5. $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta$

6. $a + d = \cos\theta - \dfrac{\sin\theta}{\tan\phi} + \dfrac{\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi} = \cos\theta - \dfrac{\sin\theta\cos\phi}{\sin\phi} + \dfrac{\sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta}{\sin\phi} = 2\cos\theta$
   $a+d$ doit être un entier, donc $2\cos\theta$ est un entier, c'est à dire $\cos\theta = 0$ ou $\pm\frac{1}{2}$ ou ± 1.
   En traçant le cercle trigonométrique par exemple, on a donc $\theta = 0\,^\circ$, $\pm 60\,^\circ$, $\pm 90\,^\circ$, $\pm 120\,^\circ$ ou $180\,^\circ$. Ce sont les seuls angles de rotation possibles, on vérifient qu'ils le sont effectivement sur les examples du pavage du plan par des carrés et du pavage du plan par des triangles équilatéraux.

3 Autour du mot de Fibonacci

1. (a) $M_3 =$ "ABABA", $M_4 =$ "ABABAABA", $M_5 =$ "ABABAABAABABA", $M_6 =$ "ABABAABAABABAABABAABA"
On remarque effectivement que le début du mot est toujours le même et que l'on ajoute des lettres à chaque étape ce qui justifie la définition du mot infini de Fibonacci.
   (b) Pour être plus précis, on remarque que $M_{n+2} = M_{n+1}M_n \ \forall n$ (au sens où l'on écrit M_{n+1} puis M_n : « concaténation »). Si on veut prouver rigoureusement cette propriété (et donc aussi celle de la question précédente), on peut faire une récurrence un peu difficile à écrire.

2. (a) $a_{n+1} = \underbrace{a_n}_{A\mapsto AB} + \underbrace{b_n}_{B\mapsto A} \ \forall n \in \mathbb{N}$ et $b_{n+1} = \underbrace{a_n}_{A\mapsto AB} \ \forall n \in \mathbb{N}$ avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + a_n$ et $b_{n+2} = a_{n+1} = a_n + b_n = b_{n+1} + b_n$
   (c) On remarque que si, pour une suite (u_n), on a une relation de récurrence entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n alors il suffit de se donner u_0 et u_1 pour déterminer la suite de manière unique.
$b_0 = 0$, $b_1 = a_0 = 1$, $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$: cela correspond à la définition de la suite de Fibonacci : $b_n = f_n \ \forall n$
$a_0 = f_1 = 1$, $a_1 = f_2 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$: donc $a_n = f_{n+1} \ \forall n$
On montre facilement que $l_{n+2} = l_{n+1} + l_n$, $l_0 = f_2$ et $l_1 = f_3$: donc $l_n = f_{n+2} \ \forall n$

3. (a) On fait la preuve sur un exemple, la généralisation n'est pas difficile. On prend N="XYXXYXYXXYXYXXYXYXXY..." qui est périodique de période 5 : le motif "XYXXY" se répète. On peut raisonnablement penser que $\frac{x_n}{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$ (la proportion de X sur la proportion de Y). La démonstration, un peu technique, peut être passée.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on écrit la division euclidienne de n par 5 : $n = 5p + q$, $p = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ ($\lfloor . \rfloor$ est la partie entière). Les suites (x_n) et (y_n) sont croissantes et positives : $x_{5p} \leq x_n \leq x_{5(p+1)}$ et $\frac{1}{y_{5(p+1)}} \leq \frac{1}{y_n} \leq \frac{1}{y_{5p}}$ donc $\frac{x_{5p}}{y_{5(p+1)}} \leq \frac{x_n}{y_n} \leq \frac{x_{5(p+1)}}{y_{5p}}$. Or on constate que $x_{5p} = 3p$ et $y_{5p} = 2p$ donc $\frac{3p}{2(p+1)} \leq \frac{x_n}{y_n} \leq \frac{3(p+1)}{2p}$. Et donc, avec le théorème des gendarmes : $\frac{x_n}{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$. CQFD
On voit donc que, pour un mot périodique, le rapport du nombre de X sur le nombre de Y tend vers le rapport dans un motif : c'est un rationnel.
   (b) i. $u_{n+1} = \dfrac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \dfrac{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{u_n} = u_{n+1}$
      ii. $x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$. $\Delta = 5$, deux solutions $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$
   (c) i. Supposons que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{r}{s}$ ($r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}^*$). Donc $\sqrt{5} = \frac{2r-s}{s}$ donc $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$.
      ii. On veut montrer $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. On écrit $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. On a alors $5q^2 = p^2$. Donc p^2 est divisible par 5. Montrons que p est divisible par 5
Si p n'est pas divisible par 5, on peut écrire sa décomposition en facteurs premiers comme : $p = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}7^{\alpha_3}\dots$ (avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{N}$ - pas de terme en 5). Donc $p^2 = 2^{2\alpha_1}3^{2\alpha_2}7^{2\alpha_3}\dots$ et donc p^2 n'est pas divisible par 5. Donc p est divisible par 5. (Si vous ne connaissez pas la décomposition en facteurs premiers, admettez ce résultat.)
      iii. $5q^2 = p^2$ avec p divisible par 5 donc $5q^2$ est divisible par 25 donc q^2 est divisible par 5. Et avec le résultat précédent, q est divisible par 5. Cela est absurde : p et q sont premiers entre eux : ils ne peuvent pas être tous deux divisibles par 5. $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$