Cours de mathématiques de MP*

Dorian Lesbre

2017 – 2018

Table des matières

1 Dénombrabilité

Équipotence : deux ensembles en bijection sont équipotents

Ensemble fini : en bijection avec un ensemble de la forme $[\![1,\, n]\!]$, n est alors unique (démo par récurrence, existence de bijection entre $[\![1,\, n]\!]$ et $[\![1,\, m]\!] \to n = m$)
Une partie F d'un ensemble fini E est finie et $\#F \leqslant \#E$, $\#F = \#E \Leftrightarrow F = E$, (mq $\#E \setminus \{a\} = \#E - 1$)

Partie de $\mathbb{N}$: une partie A de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée (par la somme). Si elle est infinie elle est en bijection avec $\mathbb{N}$
(suite (a_k) par ordre croissant), pour la surjectivité de q $\{k \in \mathbb{N} \,/\, a_k < q\}$, il admet un max...

Dénombrabilité : un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, il est au plus dénombrable s'il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$ ou s'injecte dans $\mathbb{N}$ (il est soit fini soit dénombrable)

Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

Caractérisation : soit A non vide, alors on a les équivalences :
- A est au plus dénombrable
- il existe une surjection d'un ensemble X au plus dénombrable dans A
- il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans A

Un ensemble est dénombrable s'il
- est en bijection avec $\mathbb{N}$ (numérotation)
- s'injecte dans $\mathbb{N}$ ou autre ensemble dénombrable et est infini
- existe une surjection de $\mathbb{N}$ ou autre ensemble dénombrable dans A et est infini

Opérations : si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie non vide d'ensembles dénombrables alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ et $\bigtimes\limits_{i\in I} A_i$ sont dénombrables (passer par $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$, récurrences).
Si les (A_i) sont au plus dénombrables, alors leur produit cartésien et union est au plus dénombrable.

Réunion infinie : si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille non vide d'ensembles au plus dénombrables et que I est au plus dénombrable, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est au plus dénombrable.
$\exists f_i : \mathbb{N} \to A_i$ surjectives, alors $f : (i, n) \mapsto f_i(n)$ surjective, or $I \times \mathbb{N}$ au plus dénombrable.

Non-dénombrabilité : $\mathbb{R}$ est non dénombrable, car pour toute suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il existe $\ell \in \mathbb{R}, \ell \notin u(\mathbb{N})$. (construire (a_n) et (b_n) adjacentes par trichotomie vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \notin [a_n, b_n]$ et prendre leur limite.)

Parties d'un ensemble : il n'existe pas de surjections de E dans $\mathcal{P}(E)$ ($\{x \in E, / \, x \notin f(x)\}$ n'a jamais d'antécédents)
$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable, tout comme $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (ils sont en bijection par l'indicatrice et en bijection avec $\mathbb{R}$).

2 Espace affine, barycentres, convexité

2.1 Espaces affines

Action de groupe : pour $(G, \cdot)$ un groupe et $\mathcal{E}$ un ensemble, $f : G \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une action si :
- $\forall x \in \mathcal{E}, f(e_g, x) = x$
- $\forall (a, b, x) \in G^2 \times \mathcal{E},\ f\big(a,\ f(b, x)\big) = f(a \cdot b, x)$

ex : les actions de translation $(g, x) \mapsto g \cdot x$ et de conjugaison $(g, x) \mapsto g \cdot x \cdot g^{-1}$
Transitivité : une action est transitive si $\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2, \exists g \in G, x = f(g, y)$. Elle est simplement transitive s'il y a unicité de g.
Une action correspond à un morphisme de groupe de G dans $\mathscr{S}(E)$

Espace Affine : $(\mathcal{E},\ E,\ \cdot)$ est un espace affine si :
- E est un espace vectoriel
- $\cdot : \mathcal{E} \times E \to \mathcal{E}$ est une action de groupe simplement transitive.

Les éléments de $\mathcal{E}$ sont des points et ceux de E des vecteurs. On notera $\overrightarrow{AB}$ l'unique vecteur tel que $A = B \cdot \overrightarrow{AB}$. On notera $\cdot$ par $+$

Exemples : $(E, E, +)$ est un espace affine, un sous espace affine $\mathcal{F}$ de E de direction F est un espace affine.

Translations : $t_{\overrightarrow{u}} : \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \to & \mathcal{E} \\ x & \mapsto & x + \overrightarrow{u} \end{pmatrix}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. On a $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$. Les translations sont bijectives.

Vectorialisation : pour $O \in \mathcal{E}$, on peut définir les lois

$$+ : \begin{pmatrix} \mathcal{E}^2 & \to & \mathcal{E} \\ (A, B) & \mapsto & O + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \cdot : \begin{pmatrix} \mathbb{K} \times \mathcal{E} & \to & \mathcal{E} \\ (\lambda, C) & \mapsto & O + \lambda \cdot \overrightarrow{OC} \end{pmatrix}$$

$(\mathcal{E},\ +,\ \cdot)$ est un espace vectoriel (qui dépend de O) isomorphe à E.

2.2 Barycentre

Système pondéré : c'est une famille finie $(A_i, \lambda_i)_{i\in I} \in (\mathcal{E} \times \mathbb{K})^I$ avec $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0$. Elle est normalisée lorsque $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$

Barycentre : Pour un système pondéré $(A_i, \lambda_i)_{i\in I} \in (\mathcal{E} \times \mathbb{K})^I$, il existe un unique point G de $\mathcal{E}$ tel que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$

Ce point vérifie alors $\forall M \in \mathcal{E} : \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{MG}$

Prendre $(G, M) \in \mathcal{E}^2, \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow G = M + \frac{1}{\sum_{i\in I} \lambda_i} \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ (Chasles)

Notation : on notera le barycentre $\frac{1}{\sum_{i\in I} \lambda_i} \sum_{i\in I} \lambda_i A_i$, ce qui coïncide avec les lois $+$ et $\cdot$ de l'espace vectorialisé.

Propriétés diverses ;
- L'isobarycentre est la moyenne : $\frac{1}{n}(A_1 + \ldots + A_n)$
- L'ensemble des barycentres de A et B est $\{tA + (1-t)B, t \in \mathbb{R}\}$
- Invariant par multiplication des poids par un scalaire non nul
- Invariant par permutation des éléments
- Invariance par modification des éléments de poids nul

Associativité des barycentres : pour $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$

$$\mathrm{Bar}\big((\lambda_1, A_1), \ldots, (\lambda_n, A_n)\big) = \mathrm{Bar}\left(\left(\alpha, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i\right), (\lambda_{k+1}, A_{k+1}), \ldots, (\lambda_n, A_n)\right)$$

On peut alors calculer le barycentre de $(\lambda_i, A_i)_{i\in I}$ en partitionnant I en $(I_k)_{k\in K}$ tel que $\forall k \in K, \sigma_k = \sum_{i\in I_k} \lambda_i \neq 0$ puis en calculant $G_k = \mathrm{Bar}\big((\lambda_i, A_i)_{i\in I_k}\big)$, et finalement $G = \mathrm{Bar}\big((\sigma_k, G_k)_{k\in K}\big)$

Calcul de Barycentre : on peut calculer tout barycentre en effectuant une succession de calcul de deux barycentres.

2.3 Sous-espace affine

Définition : pour $A \in \mathcal{E}$ et F un sev de E on note :

$$A + F = \{A + \overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{u} \in F\}$$

$\mathcal{F}$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$ s'il existe $A \in \mathcal{F}$ et F sev de E tel que $\mathcal{F} = A + F$.
F est appelé direction et noté $\overrightarrow{\mathcal{F}}$

La direction est unique, car on a :

$$F = \left\{\overrightarrow{AM}, \ M \in \mathcal{F}\right\} = \left\{\overrightarrow{MN}, \ (M, N) \in \mathcal{F}^2\right\}$$

- un singleton est un sous-espace affine dirigé par $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$
- une droite affine est de la forme $A + \mathrm{Vect}\big(\overrightarrow{AB}\big) = \{A + \lambda\overrightarrow{u}, \lambda \in \mathbb{K}\}$
- un sous espace affine est un espace affine sur sa direction

Caractérisation : on a les équivalences : (HP)

1. $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \forall t \in \mathbb{R}, tA + (1-t)B \in \mathcal{F}$
3. Tout barycentre d'éléments de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ est donc un sous-espace affine $\Leftrightarrow \forall (A, B) \in \mathcal{F}, (AB) \subset \mathcal{F}$

Intersection de sous-espaces affines : pour $(\mathcal{F}_i)i \in I$ des sous-espaces affines. L'intersection est (vide ou) un sous-espace affine de direction $\bigcap_{i\in I} \overrightarrow{\mathcal{F}_i}$ (stabilité du barycentre)

On a alors pour $A \subset E, A \neq \emptyset$, il existe $\mathrm{Aff}(A)$ un plus petit sous-espace affine contenant A (c'est l'ensemble des barycentres). $\mathrm{Aff}(\{A, B\}) = (AB)$

Parallélisme : pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines,
- $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ si $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{G}}$
- $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles si $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \overrightarrow{\mathcal{G}}$

Si $\mathcal{F}$ parallèle à $\mathcal{G}$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$

Intersection : soit $(A, B) \in \mathcal{E}^2$ et (F, G) deux sev de E. On a

$$(A + F) \cap (B + G) \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in F + G$$

Donc si $\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}} = E$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ et si $\overrightarrow{\mathcal{F}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{G}} = E$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.

2.4 Applications affines

Définition : pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines, $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine s'il existe $\varphi \in \mathscr{L}(E,\, F)$

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}, \overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi\big(\overrightarrow{AB}\big)$$

φ est alors unique, c'est l'application linéaire associée à f, notée $\overrightarrow{f}$

$\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, $x \mapsto a$, $\varphi + e$ avec φ linéaire sont des applications affines associées à id_E, $0_{\mathscr{L}(E)}$, φ. De même pour $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{F}$, $\varphi \in \mathscr{L}(E,\, F)$, $\begin{pmatrix} \mathcal{E} & \to & \mathcal{F} \\ A + \overrightarrow{u} & \mapsto & B + \varphi(\overrightarrow{u}) \end{pmatrix}$ est affine.

Caractérisation en termes de barycentre (HP) : soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, on a les équivalences :
1. f est une application affine
2. $\forall (A_i,\, \lambda_i)$ t.q. $\sum \lambda_i = 1$, on a $f(\sum \lambda_i A_i) = \sum \lambda_i f(A_i)$
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f\big((1-t)A + t\big) = (1-t)f(A) + tf(B)$

$2 \Rightarrow 1$ poser $\varphi : \overrightarrow{u} \mapsto f(O + \overrightarrow{u})$, mq φ linéaire et $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB})$

Propriétés des applications affines : pour $f : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ et $g : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ affines on a :
- $g \circ f$ est une application affine
- f bijective $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{f}$ bijective et alors f^{-1} est affine et $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$
- pour tout A sea de $\mathcal{E}$, $f(A)$ est un sea de $\mathcal{F}$ de direction $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{A})$
- pour tout B sea de $\mathcal{F}$, $f^{-1}(B)$ est un sea de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{B})$

2.5 Repères affines et barycentriques

Repères : un repère affine est un couple $(\Omega, \mathcal{B})$ ou Ω est un point de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_i})_{i=1}^n$ une base de E. On a alors :

$$\forall M \in \mathcal{E},\ \exists! (\lambda_i)_{i=1}^n,\ M = \Omega + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{e_i}$$

Un repère barycentrique (HP) est une liste $(A_0,\, \dots,\, A_n) \in \mathcal{E}^{n+1}$ tel que

$$\forall M \in \mathcal{E},\ \exists! (\lambda_i)_{i=0}^n,\ \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \ \text{ et } \ M = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$$

$(A_i)_{i=0}^n$ est un repère barycentrique $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{A_0 A_i})_{i=1}^n$ est une base de E.
Si $\big(A_0, \overrightarrow{A_0 A_i})_{i=1}^n\big)$ est un repère affine, alors $(A_i)_{i=0}^n$ est barycentrique. Un point M de coordonnées $(\lambda)_{i=1}^n$ dans la première aura pour coordonnées $(1 - \sum \lambda_i,\, \lambda_1,\, \dots,\, \lambda_n)$ dans la seconde.

2.6 Parties convexes

Pour des espaces vectoriels réels :

Segments : pour $(A, B) \in \mathcal{E}^2$, on définit le segment

$$[AB] = \{(1-t)A + tB,\ t \in [0,\ 1]\}$$

On a $[AA] = A$ et $[AB] = [BA]$. Les segments de $\mathbb{R}$ sont $[ab] = [a, b]$ ou $[b, a]$ selon $a < b$ ou non

Partie convexe : une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est convexe si

$$\forall (A, B) \in \mathcal{C}^2,\ [AB] \subset \mathcal{C}$$

Tout sous-espace affine, segments, intervalles de $\mathbb{R}$, $\emptyset$ sont alors convexes. Toute boule d'un espace euclidien est un convexe. L'image et l'image réciproque par une application affine d'un convexe est un convexe.

Combinaison convexe (HP) : c'est un barycentre à coeffs positifs. Elle vérifie les propriétés du barycentre. Un ensemble est convexe si et seulement s'il est stable par combinaison convexe.

Enveloppe convexe (HP) : une intersection de convexe est un convexe, il existe donc pour tout $X \subset \mathcal{E}$ un plus petit convexe contenant X, appelé enveloppe convexe. C'est l'ensemble des combinaisons convexes des points de A

3 Fonctions de la variable réelle

3.1 Théorèmes de continuité et dérivabilité

Continuité : pour $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{C}$:, continue sur I :

- **TVI :** f continue $\Rightarrow f(I)$ est un intervalle. f change de signe sur $I \Rightarrow f$ s'annule
- **Limite monotone :** si f monotone sur I alors elle admet une limite à gauche et à droite en tout point de I
- **Bornes atteintes** : g continue sur un segment $\Rightarrow g$ bornée
- **Heine :** si g est continue sur un segment, elle y est uniformément continue

Dérivation : pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, on a :

- **Rolle et EAF :** il existe $c \in]a, b[$, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- **Monotonie :** f monotone $\Leftrightarrow f'$ de signe constant (strictement si f' ne s'annule que sur des intervalles triviaux)

Théorème minimaliste : pour $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ et $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} f \text{ et } \varphi \text{ continues sur } [a, b] \\ f \text{ et } \varphi \text{ dérivables à droite sur } [a, b[\\ \forall t \in [a, b],\ |f'_d(t)| \leqslant \varphi_d(t) \end{cases} \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leqslant \varphi(b) - \varphi(a)$$

Poser $A = \{x, |f(x) - f(a)| \leqslant \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x - a)\}$, si $x \neq b \in A$, alors $x + \eta \in A$ car $\tau_f(t, x) - \tau_\varphi(t, x) \to k \leqslant 0 < \varepsilon$ donc par continuité...
De plus, $\sup A \in A$ par caractérisation séquentielle est continuité, donc $\sup A = b$
La dérivabilité sur $]a, b[$ suffit (appliquer entre $x > a$ et b et faire tendre x vers a)

Version officielle : une fonction continue sur I dérivable à l'intérieur de I dont la dérivée est majorée par M est M-lipschitzienne sur I (pour les fonctions réelles, classe $\mathscr{C}^1$ pour les fonctions complexes).

Intégration de o **:** soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur I dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

$$f'(t) = \underset{t\to a}{\mathrm{o}}\left((t-a)^n\right) \quad\Rightarrow\quad f(t) - f(a) = \underset{t\to a}{\mathrm{o}}\left((t-a)^{n+1}\right)$$

$f'(t) < \varepsilon\,|t-a|^n = \varphi'(t)$donc $|f(t) - f(a)| \leqslant \varphi(t) - \varphi(a) = \varepsilon\frac{|t-a|^{n+1}}{n+1} - 0$

Limites de la dérivée : soit $f : i \to \mathbb{K}$:

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ dérivable sur } I \setminus \{a\} \\ f'(t) \xrightarrow[t\,\to\,a^{\neq}]{} \ell \in \mathbb{K} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad f \text{ dérivable en } a \text{ et } f'(a) = \ell$$

EAF pour les réels puis sur $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
Si $f \in \mathscr{C}^1(I \setminus \{a\})$, et $f'(t) \xrightarrow[t\,\to\,a^{\neq}]{} \ell \in \mathbb{K}$ alors $f' \in \mathscr{C}^1(I)$

Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$: une fonction est de classe $\mathscr{C}^n$ s'il existe une suite de fonction $(\varphi_k)_{k=0}^n$ telles que $\varphi_0 = f$, que pour $k \leqslant n-1$ $\varphi_{k+1} = \varphi_k'$ et que φ_n est continue. On note alors $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f : φ_n.
$f \in \mathscr{C}^\infty$ si $\forall n \in \mathbb{N}, f \in \mathscr{C}^n$.

Si n et $p+q$, on peut montrer que f est de classe $\mathscr{C}^p$ et $f^{(p)}$ de classe $\mathscr{C}^q$

Prolongement de classe $\mathscr{C}^n$: si $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et que $f^{(n)}$ admet une limite finie en a pour tout $n \leqslant k$, alors son prolongement par continuité en a est de classe $\mathscr{C}n$

3.2 Formules de Taylor

Taylor-Laplace : soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $(a,b) \in I^2$:

$$\begin{aligned} f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) &= \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)\mathrm{d}t \qquad (t = a + x(b-a)) \\ &= (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{n+1}(x + t(b-a))\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Récurrence et IPP

Taylor-Lagrange : pour $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $(a,b) \in I^2$ tel que $|f^{n+1}| \leqslant M$:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Taylor-Young : pour une étude locale, soit f $n-1$ fois dérivable sur I et n fois en a (classe $\mathscr{C}^n$ au programme), on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underset{b\to a}{\mathrm{o}}\left((b-a)^n\right)$$

Démontrer par récurrence en intégrant le DL de f'

4 Fonctions convexes

4.1 Définition, propriétés élémentaires

On étudie des fonctions définies de I (ou d'une partie convexe d'un EV) dans $\mathbb{R}$

Fonction convexe : $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $(a, b) \in I^2$ et pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$, on a :

$$f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

f est concave si $-f$ est convexe

f est convexe si son graphe est en dessous de toutes les cordes.
Si $\varphi : E \to F$ affine et C convexe de E, alors $\varphi(C)$ convexe et si f convexe sur $\varphi(C)$ alors $f \circ \varphi$ convexe sur C

Épigraphe de f : on le définit par $\varepsilon_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geqslant f(x)\}$. On a alors la caractérisation :

$$f \text{ est convexe } \Leftrightarrow \varepsilon_f \text{ est une partie convexe}$$

Inégalité de convexité : soit $(\lambda_i)_{i=1}^p$ des réels positifs de somme 1, on a :

$$f \text{ convexe } \Leftrightarrow \forall (x_i)_{i=1}^p \in \mathbb{R}^p,\ \sum_{i=p}^{p} \lambda_i f(x_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i\right)$$

Inégalités de pentes : soit $x < y < z \in I^3$, si f convexe sur I alors :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

(on peut montrer que les trois inégalités sont équivalentes...)
Corollaire : posons $\varphi_a : \begin{pmatrix} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{pmatrix}$. On a

$$f \text{ convexe } \Leftrightarrow \forall a \in I, \varphi_a \text{ est croissante}$$

De même, on a les équivalences :
- f est concave
- $\forall (x, y) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \geqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$
- $\forall (x, y, z) \in I^3, x < y < z \Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geqslant \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \geqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$
- $\forall a \in I, \varphi_a$ est décroissante

4.2 Convexité et dérivabilité

Caractérisation : soit f dérivable sur un intervalle I :

$$f \text{ convexe } \Leftrightarrow f' \text{ croissante}$$

$\Rightarrow$ utiliser $\varphi_a(x) \leqslant \varphi_a(b) = \varphi_b(a) \leqslant \varphi_b(y)$ quand $x \to a$ et $y \to b$
La démo nécessite seulement la continuité sur I et la dérivabilité sur $I \setminus \{\text{bornes}\}$ On en déduit qu'une fonction deux fois dérivable est convexe $\Leftrightarrow f'' \geqslant 0$

Fonction concave : de manière symétrique, une fonction f dérivable est concave si et seulement si f' est décroissante, ou si $f'' \leqslant 0$

Position par rapport à la tangente : pour une fonction convexe et dérivable sur I on a :

$$\forall a \in I, \forall x \in i,\ f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$$

et inversement si f concave. (utiliser la croissance de φ_a)

Dérivabilité des fonctions convexes (HP) : une fonction convexe est dérivable à droite et à gauche en tout point de $I \setminus \{\text{bornes}\}$ et

$$\forall x < y \in I \setminus \{\text{bornes}\},\ f'_g(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant f'_g(y) \leqslant f'_d(y)$$

démo en utilisant φ_a monotone et bornée. On en déduit que f est continue sur $I \setminus \{\text{bornes}\}$

5 Intégration sur un intervalle quelconque

Continuité par morceaux : f est continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ possède un prolongement continu sur $[a_i, a_{i+1}]$
f est continue par morceau sur un intervalle I si elle est continue par morceau sur tout segment de I

Croissance de l'intégrale : soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ positive, on a $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est croissante sur I
De plus (HP), on a F dérivable à droite et gauche en tout point de I sauf $\sup I$ ou $\inf I$ avec $F'_g(x) = f(x^-)$ et $F'_d(x) = f(x^+)$
$F(x+h) - F(x) \leqslant \int_{[x,x+h]} |f|$ or f majoré sur un segment...

5.1 Intégrale sur $[a, +\infty[$

Intégrale sur $[a, +\infty[$: soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ On dit que $\int_a^{+\infty} f$ converge si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f \in \mathbb{K}$, elle diverge sinon. On notera alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f$

Pour justifier la convergence, il faut la continuité et montrer l'existence d'une limite finie d'une primitive F en $+\infty$
Remarque : $f \to 0$ n'entraine pas la convergence de l'intégrale (cf séries) mais ici, la convergence de l'intégrale n'implique pas celle de f.

Chasles : soit $b \in [a, +\infty[$, les intégrales $\int_{\boldsymbol{a}}^{+\infty} f$ et $\int_{\boldsymbol{b}}^{+\infty} f$ ont la même nature et :

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f$$

La convergence n dépend donc que du comportement asymptotique de f

Intégrales convergentes : l'ensemble des fonctions f de $\mathscr{C}_{pm}([a, +\infty), \mathbb{K})$ telles que $\int_a^{+\infty} f$ converge est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_{pm}([a, +\infty), \mathbb{K})$. On en déduit qu'une fonction complexe converse si sa partie réelle et imaginaire converge.

Intégrale inversée : si f continue et $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ est de classe $\mathscr{C}^1([a,+\infty[)$ et a pour dérivée $-f$

Fonctions positives : soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,+\infty), \mathbb{K})$ positive, on a :
- $\int_a^{+\infty} f$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f \geqslant 0$
- $\int_a^{+\infty} f$ converge et f continue $\Rightarrow \left[\int_a^{+\infty} f = 0 \Rightarrow f = 0\right]$
- $\int_a^{+\infty} f$ converge $\Leftrightarrow x \mapsto \int_a^x f$ majorée sur $[a,\ +\infty[$
  Dans ce cas, $\int_a^{+\infty} f = \sup_{x\geqslant a} \int_a^x f$
- $\int_a^{+\infty} f$ diverge $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f = +\infty$

Les conclusions subsistent si f n'est positive qu'au voisinage de $+\infty$

Comparaison : pour f et $g \in \mathscr{C}_{pm}([a,+\infty), \mathbb{K})$ positives :
- $\exists b \geqslant a,\ \forall t \geqslant b, 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t) \Rightarrow \begin{cases} \int_a^{+\infty} g \text{ converge } \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge} \\ \int_a^{+\infty} f \text{ diverge } \Rightarrow \int_a^{+\infty} g \text{ diverge} \end{cases}$
- $f = O_{+\infty}(g) \Rightarrow \left[\int_a^{+\infty} g \text{ converge } \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge}\right]$
- $f \sim_{+\infty} g \Rightarrow \int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} f$ ont même nature

Intégrales de Riemann : on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.
Utiliser les théorèmes ci-dessus en comparant les fonctions à une intégrale de Riemann

Intégrabilité : f est intégrable sur $[a,\ +\infty[$ ou $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument si $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.
La convergence absolue implique la convergence (posé $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ et f^-)
Une fonction semi-convergente est non-intégrable alors que $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Comparaisons : pour f et $g \in \mathscr{C}_{pm}([a,+\infty), \mathbb{K})$ si g est intégrable et positive :
- $\exists b \geqslant a,\ \forall t \geqslant b, |f(t)| \leqslant g(t) \Rightarrow f$ intégrable
- $f = O(g)$ ou $f \sim g$ alors f est intégrable

Utilisation d'une série : soit $(b_n) \in [a,+\infty]^{\mathbb{N}}$ une suite croissante qui tend vers $+\infty$, on a

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} \int_{b_{n-1}}^{b_n} f \text{ converge}$$

et qu'on a l'égalité des valeurs. La réciproque est fausse sauf si on a f positive ou $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} |f| = 0$...

5.2 Généralisation aux autres types d'intervalles

Sur $]-\infty, a]$: on la définit de même : pour $f \in \mathscr{C}_{pm}(]-\infty,a],\mathbb{K})$, $\int_{-\infty}^a f$ converge si $x \mapsto \int_x^a f$ à une limite en $-\infty$. On retrouve les propriétés :
- de Chasles : $\int_{-\infty}^a f$ converge $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^b f$ converge et $\int_{-\infty}^a f = \int_{-\infty}^b f + \int_b^a f$
- de Riemann : $\int_{-\infty}^a \frac{1}{|t|^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.
- Les théorèmes de comparaison des fonctions positives et de fonctions intégrables.

Sur $[a,b[$ et $]a,b]$: si $f\in\mathscr{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{K})$ avec $a<b$ réels. On dit que $\int_a^b f$ converge lorsque $x\mapsto\int_a^x f$ admet une limite finie en b.
On a toujours le même théorème sauf pour l'intégrale de Riemann, on a :

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}\text{ ou }\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}\text{ convergent }\Leftrightarrow\alpha<1$$

Si f est bornée ou admet une limite finie en b, alors elle est intégrable.
S'il existe $\alpha<1$ tel que $\lim\limits_{x\to b}(b-x)^\alpha f(x)=0$ alors elle converge (Riemann)

Cas d'un intervalle ouvert : on s'intéresse à $]a,b[$ avec $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$ et $f\in\mathscr{C}_{pm}(]a,b[,\mathbb{K})$. $\displaystyle\int_a^b f$ converge s'il existe $c\in]a,b[$ tel que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent. On pose alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

Cette définition et la valeur de l'intégrale ne dépendent pas de c d'après Chasles

Cela revient à montrer l'existence de limite en a et b de $F:x\mapsto\int_c^x f$

Cohérence des notations : si $f\in\mathscr{C}_{pm}(]a,b[,\mathbb{K})$, les différentes valeurs $\int_{]a,b[}f$, $\int_{]a,b]}f$, $\int_{[a,b[}f$ et $\int_{[a,b]}f$ sont égales si définies ($f\in\mathscr{C}_{pm}([a,b])$). D'où la notation $\int_a^b f$

Avec des suites : pour $f\in\mathscr{C}_{pm}(]a,b[,\mathbb{K})$ et $(\alpha_n),(\beta_n)\in(]a,b[^{\mathbb{N}})^2$ convergeant respectivement vers a et b, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha_n}^{\beta_n}f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

5.3 Propriétés de l'intégrale

Propriétés : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, si I est un segment on dira que $\int_I f$ converge si $f\in\mathscr{C}_{pm}(I,\mathbb{R})$

- SEV : l'ensemble des fonctions $f\in\mathscr{C}_{pm}(I,\mathbb{K})$ telles que $\int_I f$ converge est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_{pm}(I,\mathbb{K})$ dont $f\mapsto\int_I f$ est une forme linéaire.
- si f est positive et que $\int_I f$ converge alors $\int_I f\geqslant 0$ et $\int_I f=0\Rightarrow f=0$
- l'ensemble des fonctions intégrables est un sev de $\mathscr{C}_{pm}(I,\mathbb{K})$
- $\left|\int_I f\right|\leqslant\int_i|f|$
- $J\subset I$ alors $\int_I f$ converge $\Rightarrow\int_J f$ converge

Intégrale orientée : soit $(x,y)\in[a,b]^2$ éventuellement infini, on pose :

$$\int_x^y f(t)\mathrm{d}t=\left|\begin{array}{ll}\int_{]x,y[}f & \text{si } x<y\\ -\int_{]y,x[}f & \text{si } y<x\\ 0 & \text{si } y=x\end{array}\right.$$

On a alors la propriété de Chasles.
$F(x)=\int_a^x$ est continue sur I et dérivable si f continue avec $F'=f$.

5.4 Calcul d'intégrales

Intégration par parties : soit f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I d'extrémités a et b éventuellement infinie. L'existence de deux termes parmi $\displaystyle\int_a^b f'g$, $[fg]_a^b$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ assure l'existence du troisième et l'égalité : $\displaystyle\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$.
En pratique, intégrer par partie sur les primitives, puis passer à la limite.

Changement de variable : pour $f \in \mathscr{C}(]a,b[,\mathbb{K})$ et $\varphi :]a,b[\to]\alpha,\beta[$ strictement croissante et bijective, les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x$ ont même nature et en cas de convergence

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

Et si φ strictement décroissante : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x$ Démo : changement de variable sur un segment $\subset [a,b]$ puis passage à la limite

Propriétés :
- L'intégrabilité de f sur $]a,b[$ équivaut à celle de $(f \circ \varphi)\varphi'$
- On peut utiliser des symétries : si f paire alors $\int_{\mathbb{R}} f = 2\int_{\mathbb{R}_+} f$
- on peut faire un changement de variable sur un segment en se limitant à l'intervalle ouvert

5.5 Intégration des relations de comparaison

Comparaisons de restes : soit f et $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{K})$ avec φ positive et intégrable sur $[a,b[$ et $-\infty < a < b \leqslant +\infty$
- $f(x) = O_{x\to b}\big(g(x)\big) \Rightarrow f$ intégrable sur $[a,b[$ et $\int_x^b f = O_{x\to b}\big(\int_x^b \varphi\big)$
- $f(x) = o_{x\to b}\big(g(x)\big) \Rightarrow f$ intégrable sur $[a,b[$ et $\int_x^b f = o_{x\to b}\big(\int_x^b \varphi\big)$
- f positive et $f(x) \sim_{x\to b} g(x) \Rightarrow f$ intégrable sur $[a,b[$ et $\int_x^b f \sim_{x\to b} \int_x^b \varphi$

Comparaison des intégrales partielles : pour f et $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{K})$ avec φ positive d'intégrale divergente sur $[a,b[$.
- $f(x) = O_{x\to b}\big(g(x)\big) \Rightarrow \int_a^x f = O_{x\to b}\big(\int_a^x \varphi\big)$
- $f(x) = o_{x\to b}\big(g(x)\big) \Rightarrow \int_a^x f = o_{x\to b}\big(\int_a^x \varphi\big)$
- f positive et $f(x) \sim_{x\to b} g(x) \Rightarrow \int_a^x f \sim_{x\to b} \int_a^x \varphi$

Les résultats s'étendent aux fonctions négatives. La positivité au voisinage de b suffit.

6 Suites et séries numériques

6.1 Suites numériques

Cours de première année : convergence, divergence ver $\pm\infty$, suites adjacentes, suites monotones comparaisons et équivalents, extraction et valeur d'adhérence, théorème de Bolzano-Weierstrass.

Équivalences de ln : pour (a_n) et (b_n) deux suites positives qui tendent vers 0

Caractérisation ensembliste des valeurs d'adhérence (HP) : soit (u_n) une suite, on a les équivalences :

- ℓ est valeur d'adhérence de (u_n)
- $\forall\varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} \,/\, |u_n - \ell| < \varepsilon\}$ est infini
- $\forall\varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geqslant n, |u_p - \ell| < \varepsilon$

Une suite convergente n'admet que sa limite comme valeur d'adhérence

Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée dans $\mathbb{K}$ admet une sous-suite convergente.
Démo dans $\mathbb{R}$ par construction de suite adjacentes (a_n, b_n) telles que $[a_n, b_n]$ contiennent une infinité de termes de u, puis dans $\mathbb{C}$ par partie réelles et imaginaire.
Autre démo en utilisant les suites $z_n = \sup u_p$, $p \geqslant n$ et $y_n = \inf u_p$, $p \geqslant n$ qui encadrent u

6.2 Séries numériques

Définition : une série possède un terme général (u_n) et une somme partielle (S_n) avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$.
On dit qu'une série converge si la suite (S_n) converge et on dit alors que la somme de la série est $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n = \lim S_n$ On note $S_n(u)$ la n-ième somme partielle de la série de terme général u et $S(u)$ sa somme.

Propriétés : vues en sup

- (u_n) converge $\Leftrightarrow \sum u_{n+1} - u_n$ converge
- l'ensemble de (u_n) telles que $\sum u_n$ converge est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sur lequel $u \mapsto S(u)$ est une forme linéaire
- $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (la réciproque est fausse)
- on ne change pas la nature d'une série en ajoutant à son terme général le terme général d'une série convergente.
- si $\sum u_n$ converge, on note $R_n(u) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$, on a $S(u) = S_n(u) + R_n(u)$ donc $R_n(u) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Séries à terme général positif : soit $(u_n), (v_n)$ deux suites telles que $0 \leqslant (u_n) \leqslant (v_n)$ à partir d'un certain rang.

- $\sum u_n$ converge ou tend vers $+\infty$
- $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge
- $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge

Convergence absolue : on dit que $\sum u_n$ converge absolument lorsque $\sum |u_n|$ converge. L'absolue convergence implique la convergence. Une série convergente, mais pas absolument convergente est dite semi-convergente ($\frac{(-1)^n}{n}$)

Théorèmes de comparaison : soit (u_n) et (v_n) deux suites :

- si $\sum v_n$ converge, (v_n) positive APDCR et $u_n = O(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge
- si u_n et v_n positives et $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature
- $\sum \alpha^n$ converge $\Leftrightarrow |\alpha| < 1$
- $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Règle du n^α : si $\alpha > 1$ et $n^\alpha u_n \to 0$ alors $\sum u_n$ converge et si $\alpha \leqslant 1$ et $n^\alpha u_n \to +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.
S'il existe $M \geqslant m > 0$ tel que $M \geqslant u_n n^\alpha \geqslant m$ pour tout n alors $\sum u_n$ et $\sum n^{-\alpha}$ ont même nature.

Règle de d'Alembert : soit (u_n) et (v_n) strictement positive à partir d'un certain rang telles que $0 \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors

— si $\sum v_n$ converge alors il en est de même pour $\sum u_n$

— inversement, si $\sum u_n$ diverge alors il en et de même pour $\sum v_n$

D'où le corollaire si $\lim\limits_{\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors (u_n) converge et si $\lim\limits_{\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors (u_n) diverge

Comparaison série-intégrale : soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([n_0, +\infty[)$ positive et décroissante, on a :

$$\sum_{n \geqslant n_0+1} \left(\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n) \right) \text{ converge}$$

On en déduit que $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\int_{n_0}^{+\infty} f$ converge, et un encadrement des sommes partielles ou des intégrales.
Inversement, en cas de divergences, on peut trouver un équivalent des sommes partielles, et des restes en cas de convergence.
Même procédé si la fonction est croissante.

6.3 Sommation des relations de comparaison

Cas convergent : soit $\sum v_n$ une série convergente à terme général positif

— si $u_n = O(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge et $R_n(u) = O\big(R_n(v)\big)$

— si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge et $R_n(u) = o\big(R_n(v)\big)$

— si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ converge et $R_n(u) \sim R_n(v)$

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ alors on peut sommer l'équivalent $u_{n+1} \sim \ell u_n$

Cas divergent : soit $\sum v_n$ une série divergente à terme général positif

— si $u_n = O(v_n)$ alors $S_n(u) = O\big(S_n(v)\big)$

— si $u_n = o(v_n)$ alors $S_n(u) = o\big(S_n(v)\big)$

— si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ diverge et $S_n(u) \sim S_n(v)$

6.4 Étude de convergence de séries à terme général quelconque

Séries alternées : soit (u_n) une suite telle que $(-1)^n u_n$ soit de signe constant,

$$|u_n| \text{ décroissante et } u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \ \Rightarrow\ \sum u_n \text{ converge}$$

Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Si le terme général ne décroit pas en module, on peut faire un DL...

Sommation par tranches : soit φ une extraction telle que $\varphi(0) = 0$, on définit la série regroupée v_n par

$$v_n = \sum_{\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_n$$

Si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ aussi ($S_n(v)$ est une sous-suite de $S_n(u)$). La réciproque est vrai si $\sum_{\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} |u_n|$ tend vers 0.
C'est le cas si $\varphi(n+1) - \varphi(n)$ borné et $u_n \to 0$ ou si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et de signe constant sur les tranches.

Transformation d'Abel (HP) : pour (a_n) une suite, on définit une dérivée $(a_{n+1} - a_n)$ et une primitive (suite de dérivée (a_n)), on a alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = A_n b_n - A_{-1} b_0 - \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

On peut aussi utiliser une primitive : si $u_n = f(n)$, alors $\sum u_n$ ressemble à $\sum F(n+1) - F(n)$...

7 Topologie des espaces normés

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

7.1 Généralités

Norme : une fonction $N : E \to \mathbb{R}_+$ est une norme si elle vérifie :
- l'homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$
- l'inégalité triangulaire : $\forall (x,y) \in E^2, N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$
- la séparation : $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

On dit alors que (E, N) est un espace vectoriel normé et on note $N(x) = \|x\|$

Ex : $x \mapsto |x|$ ou $(x,y) \mapsto |x| + |y|$ ou $\max\{|x|, |y|\}$ ou $\sqrt{\langle x,\, x\rangle}$

Inégalité triangulaire :
- $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
  pour montrer la première, partir de $x = x + y - y$...
- cas d'égalité : (x,y) positivement colinéaires $\Rightarrow \|x+y\| = \|x\| + \|y\|$
  la réciproque est fausse sauf pour les normes euclidiennes.
- $\|\sum \lambda_k x_k\| \leqslant \sum |\lambda_k|\, \|x_k\|$

Distance associée : on pose $\mathrm{d}(x,y) = \|x - y\|$. Elle est symétrique, nulle si et seulement si $x = y$, invariante par translation et vérifie :

$$|\mathrm{d}(N,M) - \mathrm{d}(M,P)| \leqslant \mathrm{d}(N,P) \leqslant \mathrm{d}(N,M) + \mathrm{d}(M,P)$$

Dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des deux autres.

Espace métrique (HP) : c'est un espace muni d'une distance qui vérifie les propriétés de symétrie, séparation ($\mathrm{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$) et l'inégalité triangulaire.

Boules : soit $a \in E$ et $r > 0$, on définit :
- la boule fermée $\mathcal{B}_f(a,r) = \{x \in E \,/\, \mathrm{d}(x,a) \leqslant r\}$
- la boule ouverte $\mathcal{B}_o(a,r) = \{x \in E \,/\, \mathrm{d}(x,a) < r\}$
- la sphère $\mathcal{S}(a,r) = \{x \in E \,/\, \mathrm{d}(x,a) = r\}$

La boule dépend de la distance sur E. Toute boule est une partie convexe de E. Dans un espace vectoriel normé, toute boule ressemble à la boule $\mathcal{B}(0,1)$ (boule unité) par homothétie et translation.

Normes usuelles : sur tout espace vectoriel munie d'une base $(u_i)_{i\in I}$ (pas forcément finie), et $x = \sum_{i\in I} x_i u_i$ on définit :

- la norme infinie : $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\,,\, i \in I\}$
- la norme 1 : $\|x\|_1 = \sum_{i\in I} |x_i|$
- la norme 2 : $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i\in I} |x_i|^2}$
- la norme p : $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i\in I} |x_i|^p}$

Cette définition s'applique en particulier à $\mathbb{K}^n$, mais aussi en dimension infinie.
Pour des fonctions bornées de X dans $\mathbb{K}$, on définit la norme $N_\infty(f) = \sup_{x\in X} |f(x)|$
Enfin pour $\rho \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R}_+)$ tel que $\{x \in I \,/\, \rho(x) \neq 0\}$ soit dense dans I, on peut définir une norme sur $\{f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K}) \,/\, \rho f$ intégrable sur $I\}$ par $N_1(f) = \int_I \rho\,|f|$, et de même pour N_2

Nouveaux EV normés : les normes connues peuvent s'étendre à d'autres espaces :
— pour F un sev de E, la restriction de N à F est la norme induite sur F.
— pour $u : F \to E$ injective, $N \circ u$ est une norme sur F
Dans l'espace produit de $((E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_p, \|\cdot\|_p)$ des EVs normés, pour $x = (x_1, \ldots, x_p)$, on définit la norme produit : $\|x\| = \max\left\{\|x_1\|_1, \ldots, \|x_p\|_p\right\}$ les normes 1, 2 et p et de même pour la distance dans un espace métrique.

Distance à une partie : on définit $\mathrm{d}(x, A) = \inf\{\mathrm{d}(x, a),\, a \in A\}$.
Elle vérifie $|\mathrm{d}(x, A) - \mathrm{d}(y, A)| \leqslant \mathrm{d}(x, y)$.

Partie bornée : on définit le diamètre par $\mathrm{diam}(A) = \sup\{\mathrm{d}(a, b),\, (a, b) \in A^2\}$.
On a $\mathrm{diam}(\emptyset) = 0$. C'est une fonction croissante pour l'inclusion. Si $\mathrm{diam}(A)$ est fini on dit que A est bornée.

On a $\mathrm{diam}(A \cup B) \leqslant \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B) + \mathrm{d}(A, B)$ donc la réunion d'un nombre fini de parties bornées est une partie bornée. On caractérise les parties bornées par les équivalences :
— A est borné
— $\exists a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*,\ A \subset \mathcal{B}_f(a, r)$
— $\forall a \in E, \exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ A \subset \mathcal{B}_f(a, r)$ (partir de $r = \mathrm{diam}(A \cup \{a\}) < +\infty$

Application bornée : une application de $X \to E$ est bornée s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in A\, \|f(x)\| \leqslant R$.
L'ensemble des applications bornées est un SEV de $\mathcal{F}(X, E)$. Une application peut être bornée pour une norme, mais pas pour d'autre (sauf si les normes sont équivalentes).

7.2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Définition : c'est une application de $\mathbb{N}$ dans E. On dit que la suite (a_n) converge s'il existe $\ell \in E$ telle que $(\mathrm{d}(a_n, \ell))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. La séparation garantit l'unicité de la limite.
— si $(a_n) \to \ell$ alors $\|a_n\| \to \|\ell\|$. Toute suite convergente est donc bornée.
— une suite peut converger pour une norme et pas pour un autre
— si $(a_n) \to \ell_1$, si $(b_n) \to \ell_2$, alors $(\lambda a_n + \mu b_n) \to \lambda\ell_1 + \mu\ell_2$
— si $(a_n) \to \ell$ et $(\lambda_n) \to \lambda$ alors $(\lambda_n a_n) \to \lambda\ell$

Dans un espace produit : une suite $a_n = (a_1^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}) \in (E_1 \times \ldots \times E_k)^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_k)$ au sens de la norme produit si et seulement si les suites $(a_1^{(n)}), \ldots, (a_k^{(n)})$ convergent vers $\ell_1, \ldots, \ell_k$ respectivement.

Suite extraite, valeurs d'adhérence : tout comme dans $\mathbb{K}$, on définit une suite extraite à partir d'une extraction φ comme la suite $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. La limite d'une suite extraite est une valeur d'adhérence de la suite. La suite converge si et seulement si elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence : sa limite.
Caractérisation d'une valeur d'adhérence x (HP) :

$$\forall\varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geqslant n, \mathrm{d}(a_{n_0}, x) \leqslant \varepsilon$$

Séries : à une suite (a_n) on associe la suite $(S_n) = \left(\sum_{p=0}^{n} a_p\right)$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$. On dit que la série $\sum u_n$ converge si (S_n) converge.
On note $S_n(u)$ la n-ème somme partielle de la série de terme général u_n et $S(u)$ sa somme. SI une série converge alors son terme général tend vers 0.

Absolue convergence : on dit que la série de terme général (a_n) est absolument convergente lorsque $\sum \|a_n\|$ converge. Cependant l'absolue convergence n'implique la convergence qu'en dimension finie (contre exemple : $\sum X^n/n$ ne converge pas dans $\mathbb{K}[X]$ mais dans $\mathscr{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$)

7.3 Topologie d'un espace métrique

Ouverts et fermés : un ouvert A de E est une partie de E vérifiant :

$$\boldsymbol{\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ \mathcal{B}(x, r) \subset A}$$

La proposition avec boules ouvertes ou fermées sont équivalentes.
Un fermé est une partie de E dont le complémentaire est un ouvert

Propriétés : pour E un espace métrique :
- toute boule ouverte est un ouvert (dessin)
- toute boule fermée est un fermé
- une union d'ouverts est un ouvert
- une intersection finie d'ouverts est un ouvert

Par complémentaire, une intersection de fermé est un fermé et une union finie de fermé est un fermé.
Ces notions dépendent de E : $]a, b[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, mais pas dans $\mathbb{C}$.
E et $\emptyset$ sont ouvert et fermés. Tout singleton est un fermé.

Voisinage : soit $V \subset E$ et $a \in E$, V est voisinage de a si

$$\exists r > 0,\ \mathcal{B}_o(a, r) \subset V$$

On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages de a

il existe $r > 0, \mathrm{d}(a, x) < r \to x \in V$, V contient les points proches de A (mais aussi éventuellement très loin)

$$V \subset E \text{ est un ouvert } \Leftrightarrow V \text{ est voisinage de chacun de ses points}$$

Opérations : pour $x \in E$,
- une intersection finie de voisinage de x est encore un voisinage de x
- si A est un voisinage de x, toute partie contenant A est un voisinage de x.

Limites et voisinages : on a alors une troisième caractérisation de la convergence :
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \boldsymbol{\|a_n - \ell\| \leqslant \varepsilon}$
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \boldsymbol{a_n \in \mathcal{B}_o(\ell, \varepsilon)}$
- $\forall V \in \mathcal{V}_a,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \boldsymbol{a_n \in V}$

Et de même pour les valeurs d'adhérence. On peut caractériser le fait que la suite tend vers l'infini de la même manière en posant

$$\mathcal{V}_\infty = \{V \subset E \,/\, \exists A \in V,\ \forall x \in E,\ \|x\| \geqslant A \Rightarrow x \in V\}$$

Et d'une manière similaire $\mathcal{V}_{+\infty}$ et $\mathcal{V}_{-\infty}$ dans $\mathbb{R}$

Point intérieur, adhérent, intérieur et adhérence d'une partie :
- x est point intérieur de A si A est un voisinage de x.
- l'intérieur $\mathring{A}$ d'une partie et le plus grand ouvert contenu dans A.
  C'est l'ensemble des points intérieurs de A. On a A ouvert $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$
- x est point adhérent à A si $\forall r > 0, \mathcal{B}_o(x, r) \cap A \neq \emptyset$
- l'adhérence $\overline{A}$ d'une partie est le plus petit fermé contenant A.
  C'est l'ensemble des points adhérents. A est fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

On a par ailleurs $E \setminus \mathrm{Adh}(A) = \mathrm{Int}(E \setminus A)$

Propriétés : on sait que :
- si $A \subset B$ alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$
- l'intérieur d'une réunion contient la réunion des intérieurs
- l'intérieur d'une intersection est contenu dans l'intersection des intérieurs (égalité si l'intersection est finie).

Caractérisation séquentielle des points adhérents : un point x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui tend vers x.
On en déduit que l'adhérence de A est l'ensemble des limites des suites à valeurs dans A, et qu'une partie $B \subset E$ est fermée si et seulement si le la limite de toute suite convergente à valeur dans B est dans B.

Extension (HP) de la notion de point adhérent : un point a est adhérent à $A \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, a_n \to a$ (a peut être l'infini.) on a alors :

$$a \text{ adhérent à } A \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_a, V \cap A \neq \emptyset$$

Densité : on dit qu'un ensemble D est dense dans A si :
- $A \subset \overline{D}$
- $\forall x \in A, \forall r > 0, \exists d \in D, \mathrm{d}(a, x) \leqslant r$
- $\forall x \in A, \exists (d_n) \in D^{\mathbb{N}}, d_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

Frontière : pour un ensemble A de E on définit sa frontière par

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$$

On a donc pour tout $x \in \mathrm{Fr}(A), \mathcal{B}(x, r) \cap A \neq \emptyset$ et $\mathcal{B}(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$. La frontière est donc une partie fermée. De plus $\mathring{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$ et $E \setminus \overline{A}$ sont trois ensembles disjoints d'union A.

Ouvert relatif, fermé relatif, voisinage relatif : soit $A \subset E$

— U est un ouvert relatif à A si $\exists \widehat{U} \subset E,\ \widehat{U}$ soit ouvert et $U = A \cap \widehat{U}$

— F est un fermé relatif à A si $\exists \widehat{F} \subset E,\ \widehat{F}$ soit fermé et $F = A \cap \widehat{F}$

— V est un voisinage de a relatif à A si $\exists \widehat{V} \subset E,\ \widehat{V} \in \mathcal{V}_a$ et $V = A \cap \widehat{V}$

Il s'agit des ouverts, fermés, et voisinages pour la norme induite sur l'espace A.

7.4 Comparaison de normes

Domination : une norme N_1 et dominé par N_2 s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in E,\ N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x)$$

Il suffit de vérifier que $N_2(x) = 1 \to N_1(x) \leqslant \alpha$ par homogénéité.
Une suite convergeant vers ℓ pour N_2 convergera alors aussi vers ℓ pour N_1. N_1 n'est pas dominé par N_2, s'il existe une suite qui converge pour N_2 et non N_1

Équivalence : deux normes sont équivalentes s'il existe $\alpha > 0$ et β tel que

$$\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

C'est un relation d'équivalence (double domination). Des normes équivalentes définissent les mêmes ouverts, fermés, et suites convergentes de mêmes limites.

Topologie (HP) : une topologie est un ensemble E et une partie O de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant :

— $E \in O$ et $\emptyset \in O$

— O stable par union dénombrable et par intersection finie

O est l'ensemble des ouverts. F est fermé si $E \backslash F \in O$. V est un voisinage de a si $\exists U \in O,\ a \in U \subset V$.
On a la définition topologique de la convergence.
Exemples : un espace métrique, la topologie grossière $(E, \{E, \emptyset\})$ non métrisable et la topologie discrète $(E, \mathcal{P}(E))$.

8 Limites d'une application, continuité

Soit E et F des espaces métriques, $A \subset E$, $f : A \to B$ et a adhérent à A

8.1 Limites d'une application

Définition : on dit que l'application f tend vers $\ell \in F$ en a lorsque l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée :

— métrique 1 : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \mathrm{d}(x, a) \leqslant \eta \Rightarrow \mathrm{d}\big(f(x), \ell\big) \leqslant \varepsilon$

— métrique 2 : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ f\big(\mathcal{B}(a, \eta) \cap A\big) \subset \mathcal{B}(\ell, \varepsilon)$

— topologique : $\forall V \in \mathcal{V}_\ell,\ \exists W \in \mathcal{V}_a,\ f(W \cap A) \subset V$

— séquentielle : $\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ \lim a_n = a \Rightarrow \lim f(a_n) = \ell$ ou $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

La caractérisation topologique n'est vraie que dans un espace métrique. La convergence suffit pour l'unicité de la limite dans la caractérisation séquentielle en prenant une suite alternée.
Si f tend vers ℓ en a alors ℓ est adhérent à $f(A)$.

Continuité : pour $a \in A$, on dit que f est continue en a si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$. Caractérisation séquentielle : f continue en $a \Leftrightarrow \forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ (a_n) \to a \ \Rightarrow\ f(a_n) \to f(a)$

Unicité de la limite : si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$. (caractérisation séquentielle et unicité de la limite sur les suites).
On appelle alors ℓ la limite de f en a noté $\lim_a f$

Limites infinies : dans $\mathbb{R}$ on a les définitions usuelles. Dans E, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \infty$ si

$$\forall R \geqslant 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E,\ \mathrm{d}(x,a) \leqslant \eta \ \Rightarrow\ \|f(x)\| \geqslant R$$

Limites à l'infini : pour une fonction définie sur $\mathbb{R}$ on a les définitions usuelles en $\pm\infty$. Pour une fonction sur E on a (HP) f tend vers ℓ en ∞ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R \geqslant 0, \forall x \in E\ \|x\| \geqslant R \Rightarrow \mathrm{d}\big(f(x), \ell\big) \leqslant \varepsilon$$

Généralisation : la définition topologique de la limite est la même pour les limites finies/infinies et a et en l'infini (voisinage de l'infini). Donc deux normes équivalentes définissent les mêmes limites.

8.2 Propriétés des limites

$f : A \to F$ vérifie P au voisinage de a si $\exists V \in \mathcal{V}_a$, P vraie sur $V \cap A$

Opération sur les limites : soit f_1 et f_2 admettant des limites ℓ_1 et ℓ_2 en a.
- $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda_1\ell_1 + \lambda_2\ell_2$
- si f_1 est à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors $f_1(x) \cdot f_2(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1 \cdot \ell_2$
- si f_1 à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\ell_1 \neq 0$ alors $\frac{1}{f_1(x)} \to \frac{1}{\ell_1}$
- si g admet une limite α en ℓ, alors $(g \circ f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \alpha$

Fonction à valeur dans un espace produit : pour $f : E \to F_1 \times \ldots \times F_p$ avec $F_1 \times \ldots \times F_p$ muni de la norme produit, on appelle fonction composante les $f_i : E \to F_i$ telles que $f = (f_1, \ldots, f_p)$.
f tend vers ℓ en a si et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f_i \to \ell_i$ en a.

Continuité partielle : pour $f : A_1 \times A_2 \to F$ et $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, on considère les fonctions partielles $f_1 : \left\{\begin{array}{ccc} A_1 & \to & F \\ x & \mapsto & (x, a_2) \end{array}\right.$ et f_2 de même. La continuité des fonctions partielles est une condition nécessaire non suffisante à la continuité de f.

Obtention de limites (HP) : pour $f, g, h : A \to F$, $\varphi : A \to \mathbb{R}_+$ et $\ell \in F$.
- si $\mathrm{d}(f(x), \ell) \leqslant \varphi(x)$ au voisinage de a et $\lim_a \varphi = 0$ alors $\lim_a f = \ell$
- si $F = \mathbb{R}$, $g \leqslant f \leqslant h$ au voisinage de a et $g, h \to \ell$ alors $f \to \ell$ en a
- si $F = \mathbb{R}$, $f \leqslant g$ en a et $g \to -\infty$ alors $f \to -\infty$

Limites et inégalités : soit $f : A \to \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$
- si $m < \ell$ alors $m < f$ au voisinage de a
- si $f_1 \to \ell_1$, $f_2 \to \ell_2$ et $\ell_1 < \ell_2$ alors $f_1 < f_2$ au voisinage de a
- si $f \leqslant m$ au voisinage de a alors $\ell \leqslant m$

Une fonction continue > 0 en a est strictement positive au voisinage de a.

Prolongement par continuité (HP) : $f : A \setminus \{a\} \to F$ admet une limite ℓ en a alors la fonction prolongé par ℓ en a est continue en a.

Limite selon une partie : soit $P \subset A$, on dit que f admet une limite ℓ en a selon P si la restriction de f à P tend vers ℓ en a. On a notamment les limites à droite et à gauche des fonctions réelles.

— si $\lim_a f = b$ alors $\forall P \subset A$, a adhérent à $P \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in P}} f(x) = b$
— si f admet une limite ℓ selon P et Q alors elle admet ℓ pour limite selon $P \cup Q$

Comparaison de fonctions : au voisinage d'un point, on retrouve les définitions de o, O et $\sim$

8.3 Continuité globale

Définition : une application est continue si elle est continue en tout point de son ensemble de définition.
Deux fonctions continues coïncidant sur une partie dense sont égales.

Fonction lipschitzienne : f est k-lipschitzienne si :

$$\forall (x, y) \in A^2,\ \mathrm{d}\big(f(x),\ f(y)\big) \leqslant \mathrm{d}(x,\ y)$$

— Toute application lipschitzienne est continue
— La composée de f k_1-lipschitzienne et g k_2-lipschitzienne est k_1k_2-lipschitzienne.
— L'ensemble des fonctions lipschitzienne est un sous-espace vectoriel invariant par normes équivalentes.
— $u \in \mathscr{L}(A,\ F)$ est k-lipschitzienne $\Leftrightarrow \forall x \in a, \|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|$

Opérations sur les fonctions continues : les combinaisons linéaires et produits d'applications continues sont continues. De même dans $\mathbb{K}^n$ les applications polynomiales et rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition. Enfin la composée de $f : A \to B$ et $g : B \to C$ continue est continue. On le montre par caractère lipschitzien ou caractérisation séquentielle.

Homéomorphisme (HP) : une bijection réciproque n'est pas forcément continue ($t \in [0, 2\pi[\mapsto e^{it} \in \mathbb{U}$ à une réciproque discontinue en 1). Si c'est le cas on parle d'homéomorphisme. Si $f : E \to F$ est bicontinue ou homéomorphique on dit que E et F sont homéomorphes.

Topologie est continuité : l'image réciproque de tout ouvert, fermé ou voisinage est un ouvert fermé ou voisinage. (l'image réciproque est compatible avec les opérations ensemblistes)
On en déduit la nature ouvert/fermé des solutions d'équation/inéquations.

Continuité uniforme : f est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in A^2,\ \mathrm{d}(x, y) \leqslant \eta \to \mathrm{d}\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \varepsilon$$

L'uniforme continuité implique la continuité et le caractère lipschitzien implique l'uniforme continuité.
Caractérisation séquentielle : f est uniformément continue si et seulement si

$$\forall (x_n), (y_n) \in (A^{\mathbb{N}})^2, \mathrm{d}(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow \mathrm{d}\big(f(x_n), f(y_n)\big) \to 0$$

Continuité des applications linéaire : soit E et F deux espaces vectoriels normés et $u \in \mathscr{L}(E,\ F)$. On a

$$u \text{ est continue } \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ \boldsymbol{\|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|}$$

Il suffit même de vérifier que l'image de la sphère unité est bornée. $\Rightarrow$ par caractère lipschitzien, $\Leftarrow$ prendre $\varepsilon = 1$... On en déduit que l'ensemble $\mathscr{L}_{\mathscr{C}}$ est stable par combinaison linéaire et composition.

Continuité et dimension finie : toute application linéaire est continue en dimension finie. En dimension infinie, on montre qu'une application linéaire n'est pas continue en exhibant (x_n) tel que (x_n) bornée et non $(f(x_n))$ ou tel que $x_n \to 0$ et non $(f(x_n))$

Application linéaire et série : si u est une application linéaire alors

$$\sum x_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u(x_n) \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} u(x_n) = u\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right)$$

9 Connexité par arcs, compacité, dimension finie

9.1 Connexité par arcs

Chemin : soit A une partie de E métrique. Soit $(x,y) \in A^2$. On dit qu'il existe un chemin de x à y s'il existe une fonction p continue d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans A tel que $p(a) = x$ et $p(b) = y$. On peut se limiter à des fonctions définies sur $[0,1]$. A est connexe par arc si $\forall (x,y) \in A^2$, il existe un chemin de x à y.

— cette notion est invariante par norme équivalente.
— c'est une notion intrinsèque à A, elle ne dépend pas de E.
— une union d'intersection non-vide de connexes par arc est connexe par arc.
— les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Composantes connexes par arc : la relation "il existe un chemin entre x et y" est une relation d'équivalence. Ses classe d'équivalence sont appelées les composantes connexes par arcs. A est connexe par arc si et seulement si elle n'admet qu'une seule composante connexe par arc.

Partie étoilée : on dit que $A \subset E$ ev normé est étoilée par rapport à $a \in A$ lorsque $\forall x \in A, [a,x] \in A$.
Une partie étoilée est connexe par arc.

Image continue d'un connexe par arcs : l'image continue d'un connexe par arcs est un connexe par arcs. (composition du chemin continu et de f continue)

Partie connexe (HP)

Définition : un espace métrique X est connexe si les seuls parties ouvertes et fermées de X sont X et $\emptyset$.
Tout connexe par arcs est connexe, car $\mathbb{1}_P$ pour P ouvert et fermé est continue donc constante.

Constance locale : une application est localement constante si elle est constante au voisinage de tout point. Une application localement constante sur un connexe, et donc sur un connexe par arcs, est continue.

9.2 Compacité

COMPACT : une partie K de A est un compact si toute suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente dans $\mathbb{K}$

Propriétés de compacts :
- Ils ne sont pas relatifs (les compacts de $\mathbb{R}$ sont des compacts de $\mathbb{C}$).
- Ils sont fermés et bornés. (dans $\mathbb{R}^n$ ce sont exactement les fermés et bornés)
- Tout fermé d'un compact est un compact
- Ils sont invariants par normes équivalentes
- Un produit cartésien de compact est un compact

Compacts et suite : une suite à valeurs dans un compact converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Compact et application : soit $f : K \to A$ continue et K compact.
- $f(K)$ est un compact, donc f est bornée et atteint ses bornes
- si f est bijective alors f^{-1} est continue
- f est uniformément continue.

Réunion et intersection de compacts (HP)

Compacts emboités : pour (A_n) une suite décroissante de compacts non-vides, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. On en déduit que (il existe $x_n \in A_n$..., cette suite admet une valeur d'adhérence). On a alors les résultats équivalents :
- pour F_n une suite de fermés d'un compact K, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \bigcap_{k=0}^{n} F_k = \emptyset$
- pour U_n une suite d'ouverts, on a $\displaystyle K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \to \exists n \in \mathbb{N}, K \subset \bigcup_{k=0}^{n} U_k$

Inversement, si on peut extraire un sous-recouvrement fini de tout recouvrement dénombrable de K par des ouverts, K et compact. (prendre une suite u_k dans K, on a $K \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_p, p \geqslant n\}}\right) \neq \emptyset$ d'après la propriété sur les fermés).

Théorème de Borel-Lebesgue (HP) : K est compact si et seulement si de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini.

9.3 Dimension finie

Norme infinie : il existe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On définit la norme infinie par $N_\infty(x) = \max\limits_{i\in[\![1,\, n]\!]} |e_i^*(x)|$. Ainsi $\begin{pmatrix} (\mathbb{K}^n,\, \|\cdot\|_\infty) & \to & (E,\, N_\infty) \\ (x_i) & \mapsto & \sum x_i e_i \end{pmatrix}$ est une isométrie.
- les compacts de E sont exactement les fermés bornées comme dans $\mathbb{K}^n$
- toutes les normes de E sont équivalentes à N_∞ car $N(\sum x_i e_i) \leqslant (\sum N(e_i))N_\infty(x)$ et que N continue donc $N(S(0,1))$ est un compact.

Fonctions coordonnées : pour $f : A \to F$ on peut écrire $f(x) = \sum f_i(x)e_i$, définissant ainsi les fonctions composantes dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ f_i. On a alors :
- f admet une limite finie en a adhérant à $A \Leftrightarrow \forall i, f_i$ admet une limite finie en A
- f est continue/lipschitzienne/uniformément continues si et seulement si toutes les f_i sont continues/lipschitziennes/uniformément continues.
- une suite converge si et seulement si toutes ses suites coordonnées convergent
- toute série absolument convergente est convergente.

Compacité : les compacts sont exactement les fermés bornées t dimension finie.

— toute suite bornée admet une valeur d'adhérence

— toute suite bornée converge si et seulement si elle n'admet qu'une valeur d'adhérence.

— la boule unité fermé est un compact de E

On en déduit aussi qu'un SEV F de dimension finie d'un EV E est un fermé de E, puis que pour tout $x \in E$, $\mathrm{d}(x, F)$ est atteinte (continuité de $a \to \mathrm{d}(x, a)$ sur un compact inclus dans F)

Théorème de Riesz (HP) : si la boule unité d'un EV normée est compact, alors cet EV est de dimension finie.

10 Espaces vectoriels et algèbres

Revoir le cours de sup sur les espaces vectoriels et la dimension finie.

10.1 Dualité

Dual : soit E un espace vectoriel. L'espace dual et l'ensemble des formes linéaires : $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non nulle ($\Leftrightarrow$ sev admettant une droite pour supplémentaire). Deux formes linéaires ont même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.

Formes coordonnées : pour $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, on définit e_i^* comme les formes linéaires vérifiant $(e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$. Elle constitue une famille libre de E^* (base si $\dim E < \infty$)

En dimension finie n : $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)$ et $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$

Bidual : pour $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ on pose $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$. La fonction $j : x \mapsto \hat{x}$ est linéaire injective de E dans $(E^*)^*$. C'est un isomorphisme si $\dim E < \infty$.

Orthogonalité (HP) : On définit deux notions d'orthogonalités :

— pour $A \subset E$, $A^\perp = \{\varphi \in E^* \,/\, \forall x \in A, \varphi(x) = 0\} = \bigcap_{x \in A} \mathrm{Ker}(\hat{x})$

— pour $B \subset E^*$, $B_\perp = x \in E \,/\, \forall \varphi \in B,\, \varphi(x) = 0 = \bigcap_{\varphi \in B} \mathrm{Ker}(\varphi)$

En dimension finie on a $B^\perp = j(B_\perp)$ (j est isomorphique). On a alors

— $A \mapsto A^\perp$ et $B \mapsto B_\perp$ sont décroissantes

— $A^\perp$ et $B_\perp$ sont des sous-espaces vectoriels

— $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$ et $B_\perp = \mathrm{Vect}(B)_\perp$ même si A et B ne sont pas des SEV

— $A \subset (A^\perp)_\perp$ (égalité en dimension finie)

— $\dim A^\perp = \dim E - \dim A$ et $\dim B_\perp = \dim E - \dim B$

10.2 Algèbres

Application bilinéaire : une application $b : E \times F \to G$ est bilinéaire si $b' : x \mapsto b(x, y_0)$ et $b'' : y \mapsto b(x_0, y)$ sont linéaires pour tout $(x_0, y_0) \in E \times F$.

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E, $(f_j)_{j \in J}$ une de F et $(z_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de G, alors il existe une unique application bilinéaire $b : E \times F \to G$ vérifiant $\forall (i, j) \in I \times J$, $b(e_i, f_j) = z_{(i,j)}$

Algèbre : une algèbre est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une loi de composition interne bilinéaire, associative possédant un neutre noté 1_A.
Autre définition : un anneau muni d'une multiplication externe vérifiant

$$\forall(\lambda, a, b) \in \mathbb{K} \times A^2 \ \lambda \cdot (a \times b) = (\lambda \cdot a) \times b = a \times (\lambda \cdot b)$$

Sous-algèbre : c'est un sous-espace vectoriel stable par multiplication et contenant 1_A. Une intersection de sous-algèbre est une sous-algèbre. On a donc la notion de sous-algèbre engendrée par une partie. La plus petite sous-algèbre est $\mathrm{Vect}(1_A)$. La plus petite sous algèbre d'un élément $a \in A$ est $\mathbb{K}[a] = \mathrm{Vect}\big((a^k)_{k\in\mathbb{N}}\big)$

Morphisme d'algèbre : c'est une fonction $f : A \to B$ vérifiant :
- f linéaire : $f(\lambda \cdot a + \mu \cdot b) = \lambda \cdot f(a) + \mu \cdot f(b)$
- f compatible avec le produit : $f(a \times b) = f(a) \times f(b)$
- $f(1_A) = 1_B$

$\mathrm{Vect}(1_A)$ est isomorphe à $\mathbb{K}$. Toute algèbre contient donc $\mathbb{K}$. L'image et l'image réciproque d'une sous-algèbre par un morphisme d'algèbre est une sous-algèbre.

Idéaux d'une algèbre : soit A une algèbre. Un idéal I de A est :
- un sous-espace vectoriel de A
- un ensemble absorbant : $\forall a \in A, \forall i \in I$, $ai \in I$ et $ia \in I$

Le noyau d'un morphisme d'algèbre est un idéal.

10.3 Substitution polynomiale, polynômes annulateurs

Substitution : pour A une algèbre et $P \in \mathbb{K}[X]$, on définit $P(A) = \sum p_i A^i$.
Si $A = \mathbb{K}$, on retrouve la fonction polynomiale, si $A = \mathbb{K}[X]$, il s'agit de la composition. L'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre

Idéal annulateur : pour $u \in A$, l'idéal annulateur de u est le noyau du morphisme $\begin{pmatrix} \mathbb{K}[X] & \to & A \\ P & \mapsto & P(u) \end{pmatrix}$.
Tout élément de l'idéal annulateur est un polynôme annulateur.
Pour I un idéal de $\mathbb{K}[X]$, il existe un unique Π unitaire ou nul tel que $I = \Pi\mathbb{K}[X]$ (division euclidienne et minimalité). C'est le générateur unitaire de I.
Si $u \in A$ admet un polynôme annulateur non-nul, on définit son polynôme minimal comme le polynôme unitaire générateur de son idéal annulateur. Les polynômes annulateurs sont alors des multiples de π_u
- $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent a X^n comme annulateur (donc X^k comme minimal)
- les projecteurs admettent $X^2 - X$

Sous-algèbre engendrée : pour $u \in A$, on la note $\mathbb{K}[u] = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$. Si u admet un polynôme minimal de degré d, alors $\mathbb{K}[u] = \mathrm{Vect}(1_A, u, \dots, u^{d-1})$ est de dimension finie. On peut déterminer $P(u)$ par le reste de la division de P par π_u. Sinon $\mathbb{K}[u]$ est isomorphe à $\mathbb{K}[X]$

Dimension finie : en dimension finie, tout élément admet un polynôme minimal.

11 Réduction des endomorphismes

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque non nulle, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

11.1 Quelques outils

SEV stable : soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est table par u si $u(F) \subset F$. SI $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de F alors

$$F \text{ est stable par } u \Leftrightarrow \forall i \in I, u(e_i) \in F$$

Si $u \circ v = v \circ u$ alors $\mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ sont stables par u.

Endomorphisme induit : pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un SEV stable par u on définit l'endomorphisme induit $u_F : \begin{pmatrix} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{pmatrix}$. Ce n'est pas une restriction.
$\mathrm{Im}(u_F) = u(F)$ et $\mathrm{Ker}(u_F) = \mathrm{Ker}(u) \cap F$

Traduction matricielle : dans une base $b = b_1 \wedge b_2$ adaptée à F, $\mathcal{M}_b(u) = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ $A = \mathcal{M}_{b_1}(u_F)$, $D = \mathcal{M}_{b_2}((p \circ u)_G)$ avec $G = \mathrm{Vect}(b_2)$ et p la projection sur G parallèlement à F. Plus généralement si $E \bigoplus_{i=1}^n E_i$, chacun des E_i est stable par u si dans une base adaptée à $\bigoplus E_i$ la matrice de u s'écrit $\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{bmatrix}$

Polynôme d'endomorphismes : pour $P = \sum p_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $P(u) = \sum p_i u^i$ et $P(A) = \sum p_i A^i$

Endomorphismes nilpotents : $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$. L'indice de nilpotence est le plus petit entier r tel que $u^r = 0$. Si $E \neq 0$, u est non injectif et non surjectif et $r \geqslant 1$. On définit de même la nilpotence sur les matrices.
Si u est nilpotent d'indice r et $x \in E \setminus \mathrm{Ker}(u^{r-1})$ alors $\big(x, u(x), \dots, u^{r-1}(x)\big)$ est libre. On en déduit que $r \leqslant \dim E$.

Il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte. Toute matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Polynôme annulateur et minimaux : en dimension finie, tout endomorphisme/matrice admet un polynôme annulateur non nul, donc un polynôme minimal.

— si $P(u) = 0$ et $P(0) \neq 0$ alors u est inversible ($P = XQ + p_0$ donc $0 = u \circ (Q(u)) + p_0 I_n$)
— si $E \neq \{0\}$ alors $\deg \pi_u \geqslant 1$ avec égalité si et seulement si u est une homothétie
— si F est stable par u et u admet un polynôme minimal, alors u_F aussi et π_{u_F} divise π_u

Lemme de décomposition des noyaux : soit $P = \prod_{i=1}^r P_i$ un polynôme avec $(P_1, \dots, P_r)$ premier entre eux 2-à-2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme, on a

$$\mathrm{Ker}\big(P(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big(P_i(u)\big)$$

Démo par récurrence en utilisant l'assoc de $\oplus$ et Bézout pour le cas $r = 2$.
Utile si p est annulateur ($\mathrm{Ker}(P(u)) = E$). On retrouve $E = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ pour les projecteurs ou le résultat sur les suites récurrentes d'ordre 2

11.2 Éléments propres

VALEUR PROPRE : soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe $x \in E$ *non-nul* tel que $\boldsymbol{u(x) = \lambda x}$
On dit que x est un vecteur propre associé à λ. L'ensemble des vecteurs propres d'un λ est un sous-espace vectoriel de E noté $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$

Propriétés :
- Les vecteurs propres associés à λ sont ceux de $E_\lambda(u) \setminus \{0\}$.
- Si $\lambda \neq 0$ alors $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$
- Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont valeurs propres 2-à-2 distinctes alors $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}$ (une famille de vecteur propre associées à des valeurs distinctes est donc libre).
- Si F est stable par u, si $E_\lambda(u) \cap F \neq \{0\}$ alors $E_\lambda(u_F) = E_\lambda(u) \cap F$ (sinon λ n'est pas valeur propre de u_F)

Cas de la dimension finie : si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont des valeurs propres de u 2-à-2 distinctes, alors $\sum \dim E_{\lambda_i}(u) \leqslant \dim E$.
On pose $\mathrm{sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u. Il contient au plus $\dim E$ éléments. (en dim infinie, c'est l'ensemble de λ tel que $u - \lambda \mathrm{id}_E$ non bijectif).

Matrices : on définit similairement aux endomorphismes les éléments propres d'une matrice. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme de a dans (e_i), on a

$$x = \sum x_i e_i \in E_\lambda(u) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A)$$

Deux matrices semblables ont même spectre et si $A = PBP^{-1}$ alors $E_\lambda(A) = PE_\lambda(B)$.

Spectre et corps si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$ avec $\mathbb{K}'$ sous corps de $\mathbb{K}$, on a $\mathrm{sp}_{\mathbb{K}'}(A) = \mathrm{sp}_{\mathbb{K}}(A) \cap \mathbb{K}'$.
Dans $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(\overline{A})$ car si $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $E_\lambda(A)$ alors $(\overline{X_1}, \dots, \overline{X_n})$ est libre dans $E_{\overline{\lambda}}(\overline{A})$. Donc $\dim E_\lambda(A) = \dim E_{\overline{\lambda}}(\overline{A})$

Avec les polynômes annulateurs : pour $x \in E_\lambda(u)$, on a $P(u)(x) = P(\lambda)x$ pour tout polynôme. Toute valeur propre est donc racine d'un polynôme annulateur.
(HP) si un endomorphisme admet un polynôme minimal π_u, ses valeurs propres sont les racines de π_u (écrire $\pi = (X * \mu)Q$ si μ n'est pas valeur propre, $Q(u) = 0$...)

Théorème de Cayley-Hamilton : le polynôme caractéristique de u annule u : $\chi_u(u) = 0$ (c'est donc un multiple du polynôme minimal)
Si u est une matrice compagnon, $\chi_u = \pi_u$. Sinon pour $x \in E$, $(x, u(x), u^2(x), \dots)$ est une base du sev stable par u contenant x dont la matrice est une matrice compagnon.

11.3 Polynôme caractéristique

Définition : pour une $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on appelle polynôme caractéristique l'unique polynôme $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

Existe car det est polynomial, unique car $\mathbb{K}$ est infini.

Propriétés :
- on peut voir $\det(XI_n - A)$ comme déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_]\left(\mathbb{C}[X]\, n\right.$
- si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, χ_A est le même dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A$ (développement du det)

Polynôme caractéristique et spectre :
- le racines de χ_A sont les valeurs propres de A
- si A est triangulaire de diagonale $(a_1, \ldots, a_n)$ alors $\chi_a = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$
- si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n impair, alors A admet au moins une valeur propre.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme : deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. $\det(XI_n - PAP^{-1}) = \det(P(XI_n - A)P^{-1}) = \det(XI_n - A)$

On définit le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dim finie comme le polynôme de sa matrice dans une base. Il vérifie les même propriétées que le matriciel. De plus, si F stable par u alors χ_{u_F} divise χ_u (matrice dans une base adaptée...). Donc si χ_u est scindé alors χ_{u_F} aussi

Multiplicité d'une valeur propre : en dim finie, c'est la multiplicité de λ en tant que racine de χ_A. On a
- $\forall \lambda \in \mathrm{sp}(u), 1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$
- si $\mathrm{rg} u = r$, alors χ_u est divisible par X^{n-r}
- $\chi_A = \prod (X - \lambda_i)$ donc $\mathrm{Tr}(A) = \sum \lambda_i$ et $\det(A) = \prod \lambda_i$

11.4 Diagonalisation

En dimension finie

Définition : soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable s'il existe une base b de E telle que $\mathcal{M}_b(u)$ soit diagonale. b est alors appelée base de diagonalisation. Une matrice est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale

$\mathcal{M}_b(u)$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ u est diagonalisable.
u est diagonalisable s'il existe une base (e_i) de E constituée de vecteurs propres de u, alors $\mathcal{M}_b(u) = PDP^{-1}$ avec $P = [e_1, \ldots, e_n]$

Critère de diagonalisation : si $\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ distincts 2-à-2,
- u est diagonalisable
- $E = \bigoplus E_{\lambda_i}(u)$

— $\sum \dim E_{\lambda_i}(u) = \dim E$ (on a déjà la somme directe sur de vp distinctes)
Prendre une base adaptée à la diagonalisation où aux sous-espaces propres...
— On a les même énoncés sur les matrices.
— Si u admet n vp alors u diagonalisable.
— projecteurs et symétries sont diagonalisables

Avec le polynôme caractéristique :

- χ_u scindé à racines simples $\implies$ u diagonalisable
- $\begin{cases} \chi_u \text{ scindé sur } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in \mathrm{sp}(u),\ \dim E_\lambda(u) = m(\lambda) \end{cases} \iff u$ diagonalisable

on s'intéresse surtout aux valeurs propres multiples, par exemple $\mathrm{rg}(u - \lambda \mathrm{id})$

Avec les polynômes annulateurs : on a les équivalences :
— u est diagonalisable
— u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples
— π_u est scindé à racines simples
Prendre $P = \prod(X - \lambda)$ et utiliser la décomposition des noyaux. On en déduit que si u est diagonalisable et F stable par u, alors u_F est diagonalisable.

Projecteur spectraux (HP) : ce sont les projecteurs p_λ sur la décomposition $E = \bigoplus_\lambda E_\lambda(u)$ pour u diagonalisable. On a $u = \sum \lambda p_\lambda$ ce qui permet de calculer u^n (mieux que la diagonalisation s'il y a des racines multiples...) Ces projecteurs sont des polynômes en u.

11.5 Trigonalisation

Définition : en dimension finie, un endomorphisme u est trigonalisable s'il existe une base b tel que $\mathcal{M}_b(u)$ soit triangulaire supérieure.
Une matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure

Ces deux définitions sont équivalentes par l'association matrice-endomorphisme. Dans la base $(e_i, \dots, e_n)$ de trigonalisation, les $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ sont stables par u.

Lemme de récurrence : si $u \in \mathscr{L}(E)$ possède une valeur propre λ, alors il existe une base de E dans laquelle sa matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$

Lien avec le polynôme caractéristique : un endomorphisme/une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.
Toute matrice est donc trigonalisable dans $\mathbb{C}$

Pratique de la trigonalisation : dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$:

— si $\mathrm{sp}(A) = (a, b, b)$ alors dans une base $\begin{bmatrix} a & 0 & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$

— si $\mathrm{sp}(A) = (a, a, a)$ alors soit $\dim E_a(A) = 2$ comme ci-dessus, sinon $v = A - aI_n$ est nilpotente d'indice 3 (noyau de dim 1) donc dans une base $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

Endomorphismes nilpotent : on a les équivalences

— u est nilpotent

— il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure

— le polynôme caractéristique de u est X^n

Polynômes annulateurs : si u possède un polynôme annulateur scindé, E peut se décomposer en une somme directe des SEV stable par sur lesquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent (et est donc trigonalisable HP).

Application : on peut utiliser les polynômes annulateurs pour résoudre des équations différentielles ou des suites récurrentes.

12 Espaces préhilbertiens réels et euclidiens

12.1 Définitions

Produit scalaire : un produit scalaire est une fonction de $E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique définie ($\langle x,\, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$) positive ($\langle x,\, x\rangle \geqslant 0$).
Un espace préhilbertien réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Un espace euclidien est préhilbertien de dimension finie. On note $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\, \cdot\rangle}$ la norme euclidienne associée au produit scalaire. C'est une norme

— Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x,\, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$
avec égalité $\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}_+, x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$

— Inégalité triangulaire : $\begin{cases} \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \\ \text{avec égalité } \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}_+, x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x \\ |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x \pm y\| \end{cases}$

— Formules de polarisation : $\begin{cases} 2\langle x,\, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \\ 2\langle x,\, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2 \\ 4\langle x,\, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \end{cases}$

— Identité du parallélogramme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2$

Orthogonalité : on note $x \perp y \Leftrightarrow \langle x,\, y\rangle = 0$ et $A \perp B \Leftrightarrow \forall (a,b) \in A \times B, a \perp b$.
Enfin on définit $A^\perp = \{x \in E \,/\, \forall a \in A, x \perp a\}$

— $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$ est un SEV fermé de E

— $A \subset (A^\perp)^\perp$ avec égalité en dimension finie
— $A \oplus A^\perp$ ($= E$ en dimension finie)

Une famille est orthogonale si elle est composée de vecteurs 2-à-2 orthogonaux. Elle est alors libre. Elle est normée si ses vecteurs sont de norme 1.

$$\forall (x,y) \in E^2, x \perp y \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2 \qquad \text{(Pythagore)}$$

Plus généralement, pour (e_i) orthogonale $\sum \|e_i\|^2 = \|\sum e_i\|^2$.

Base orthonormée : tout espace euclidien admet une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Pour $(x,y) \in E^2$ on a alors :

$$x = \sum \langle x,\, e_i\rangle\, e_i \qquad \text{et} \qquad \langle x,\, y\rangle = \sum x_i y_i$$

Lemme de Riesz : pour $a \in E$, on définit $\varphi_a : x \mapsto \langle a,\, x\rangle$. La fonction $\varphi : a \mapsto \varphi_a$ est linéaire injective de E dans E^* donc bijective. Pour toute forme linéaire u il existe donc un unique $a \in E$ tel que $u = \varphi_a$
On a en particulier $e_i^* = \varphi_{e_i}$ (l'orthogonalité euclidienne correspond à celle de dualité)

Produit vectoriel (HP) : dans un espace euclidien de dimension n orienté, on définit le produit mixte par $[x_1, \dots, x_n] = \det_B(x_1, \dots, x_n)$ ou B est orthonormée directe. Pour $(x_1, \dots, x_{n-1})$ fixé, $f : x \mapsto [x_1, \dots, x_{n-1}, x]$ est une forme linéaire donc $f = \langle w,\, \cdot\rangle$. w est alors le produit vectoriel $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$

12.2 Projection orthogonale

Supplémentaire orthogonal : si F admet un supplémentaire orthogonal G tel que $G + F = E$ et $G \perp F$ alors $G = F^\perp$ et $F = (F^\perp)^\perp$.
On peut alors par unicité définir la projection orthogonale sur F parallèlement à $F^\perp$ noté π_F. On a $\forall x \in E, \|\pi_F(x)\| \leqslant \|x\|$.
Si $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est de dimension finie et (e_i) orthonormé, alors $\pi_F(x) = \sum \langle x,\, e_i\rangle\, e_i$. Si E est de dimension finie Si $F \oplus F^\perp = E$ alors $\pi_F + \pi_{F^\perp} = \mathrm{id}_E$

Distance à un SEV : si F est un SEV de E préhilbertien réel admettant un supplémentaire orthogonal. Alors pour tout $x \in E$, $\mathrm{d}(x, F)$ est atteinte et $\mathrm{d}(x, F) = \mathrm{d}(x, \pi_F(x))$.

Inégalité de Bessel : pour un sev de dimension finie $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$,

$$\forall x \in E, \sum \langle e_i,\, x\rangle^2 = \|p_F(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$$

Procédé d'orthonormalisation de Schmidt : pour $(e_1, \dots, e_n)$ une base, il existe $(f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormée telle que $\forall p \in [\![1,\ n]\!]\,, \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$. On a unicité si on impose $\langle e_i,\ f_i\rangle > 0$ (récurrence...)
L'énoncé reste vrai pour des familles libre dénombrable en dimension infini.

Suite orthonormée totale : une suite orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale si $\overline{\mathrm{Vect}\big((e_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)} = E$.
Si p_n désigne la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors pour tout $x \in E$, $p_n(x) \to x$

Égalité de Parseval-Bessel : si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée totale alors pour tout $x \in E$, la série $\sum \langle x,\ e_n\rangle^2$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n,\ x\rangle^2 = \|x\|$$

12.3 Endomorphismes d'un espace euclidien

Endomorphisme symétrique : $u \in \mathscr{L}(E)$ est symétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x,\ u(y)\rangle = \langle u(x),\ y\rangle$$

Pour b une base orthonormée, u est symétrique $\iff \mathcal{M}_b\,(u)$ est symétrique. L'espace $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes symétriques est donc dimension $\frac{n(n+1)}{2}$

un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique

Réduction des endomorphismes symétriques : soit $u \in \mathcal{S}(E)$
- si F stable par u alors $F^\perp$ est stable par u
- les sous-espaces propres sont donc 2-à-2 orthogonaux
- Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non-nulle, alors il existe un SEV stable de E de dimension 1 ou 2

Théorème spectral : soit E euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$
- E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propre de u
- E possède une base orthonormée de vecteurs propres de u
- u est diagonalisable dans une base orthonormée

En version matricielle, on définit les matrices orthogonales comme vérifiant l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = {}^{\mathrm{t}}P$
- $P\,{}^{\mathrm{t}}P = I_n$
- ${}^{\mathrm{t}}PP = I_n$
- $(C_1(P),\ \dots,\ C_n(P))$ orthonormée
- $(L_1(P),\ \dots,\ L_n(P))$ orthonormée

Pour Q une matrice symétrique, il existe alors $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $S = PDP^{-1} = PD{}^{\mathrm{t}}P$ (elle est orthogonalement diagonalisable). Une matrice symétrique réelle est donc diagonalisable.

Diagonalisation : déterminer le spectre et une base orthonormée des sous-espaces propres, pour inverser la matrice, il suffit de transposer...

Application (HP) : le plus petit k (norme subordonnée) vérifiant $\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant k\|x\|$ est le rayon spectral de u : $\max_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)} |\lambda|$

Endomorphisme symétrique positif (HP) : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si toutes ses valeurs propres sont positives, et défini positif si elles sont strictement positives.
Pour $u \in \mathcal{S}(E)$ positif, il existe un unique endomorphisme v symétrique positif tel que $v^2 = u$ (existence : avec le théorème spectral, unicité par la restriction de v aux sous-espaces propres)

Décomposition polaire (HP) : pour $M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$ (considérer la racine de ${}^{\mathrm{t}}MM$)

Automorphismes orthogonaux

Isométrie vectorielle : un endomorphisme u est une isométrie vectorielle si

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$$

une isométrie vectorielle est un automorphisme qui conserve le produit scalaire (relation de polarisation)

Caractérisation des isométries : on a les équivalences
- u est une isométrie vectorielle
- pour B une base orthonormée, $u(B)$ est une base orthonormée
- $\mathcal{M}_B(u)$ est orthogonale

Automorphismes orthogonaux du plan : dans un plan, les automorphisme sont soit des rotations $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ ou des symétries $S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$.
Les isométries vectorielles sans valeurs propres sont donc des rotations d'angle non multiple de π.

Réduction des automorphismes orthogonaux : pour $u \in \mathcal{O}(E)$, il existe une base B telle que $\mathcal{M}_B(u)$ soit diagonales par bloc avec
- des blocs de taille 1 valant ± 1
- des blocs de taille 2 de la forme $R(\theta)$

En dimension 3, les isométries vectorielles sont de la forme $\begin{bmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$

12.4 Compléments (HP)

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques : une forme f est bilinéaire symétrique si $\forall (x,y) \in E^2, f(x,y) = f(y,x)$.
A f on associe la forme quadratique $q : x \mapsto f(x,x)$. Les formules de polarisation donne f en fonction de q : $f(x,y) = \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}$.
Matrice d'une forme bilinéaire : il s'agit de la matrice $\mathcal{M}_{(e_i)}(f) = (f(e_i, e_j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$

Représentation des formes bilinéaires : pour $u \in \mathscr{L}(E)$, $\varphi_u : (x,y) \mapsto \langle x,\, u(y)\rangle$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{BL}(E)$ ou de $\mathcal{S}(E)$ sur $\mathcal{BLS}(E)$

Adjoint : pour $u \in \mathscr{L}(E)$, il existe un unique $u^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x),\, y\rangle = \langle x,\, u^*(y)\rangle$
u symétrique si et seulement si $u = u^*$ et u orthogonal si et seulement si $u^{-1} = u^*$. Dans une base b orthonormée, $\mathcal{M}_b(u^*) = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{M}_b(u)$

13 Suites et séries de fonctions

13.1 Suites de fonctions

Convergence : soit E et F deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et $(f_n) \in (F^A)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions

— (f_n) converge simplement sur A si $\forall x \in A, f_n(x)$ converge. On pose alors $f(x) = \lim f_n(x)$ la limite de f_n

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in n, \forall n \geqslant n_0,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

— (f_n) converge uniformément sur A s'il existe f telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in n, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in E,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

(le graphe de f_n est compris àpdcr dans l'enveloppe $[f-\varepsilon, f+\varepsilon]$)

Une suite peut ne converger que sur une partie de son ensemble de définition. La convergence uniforme implique la convergence simple. Pour montrer la convergence uniforme, exhiber (α_n) tel que $\forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \alpha_n$ (étude de variation si $A \subset \mathbb{R}$), pour la non-convergence, exhiber (x_n) tel que $f_n(x_n) \not\to 0$

Opérations algébriques : soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions

— si $f_n \underset{s}{\to} f$ et $g_n \underset{s}{\to} g$ alors $f_n + g_n \underset{s}{\to} f + g$ et $f_n g_n \underset{s}{\to} fg$

— si $f_n \underset{u}{\to} f$ et $g_n \underset{u}{\to} g$ alors $f_n + g_n \underset{u}{\to} f + g$

— si f_n et g_n sont bornées et $f_n \underset{u}{\to} f$ et $g_n \underset{u}{\to} g$ alors $f_n g_n \underset{u}{\to} fg$

Pour les fonctions bornées : une suite de fonction $(f_n) \in \mathcal{B}(A, F)$ converge uniformément vers f si et seulement si elle converge dans $\mathcal{B}(A, F)$ muni de $\mathcal{N}_\infty$

Convergence uniforme locale : (f_n) converge uniformément vers f au voisinage de a s'il existe V un voisinage de a tel que (f_n) converge uniformément vers f sur V.
(f_n) converge uniformément au voisinage de tout point si $\forall a \in A, \exists V \in \mathcal{V}_a$ tel que (f_n) converge uniformément vers f sur V.

Convergence est continuité : la convergence simple ne conserve pas la continuité, en revanche, si $(f_n) \in \mathscr{C}(A, F)^{\mathbb{N}}$ converge uniformément au voisinage de a vers f, alors f est continue en a (majorer $\|f(x) - f(a)\| \leqslant \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(a)\| + \|f_n(a) - f(a)\|$)
Ainsi si (f_n) converge uniformément au voisinage de tout point, f est continue.
La convergence simple suffit si toutes les fonctions sont lipschitziennes de même rapport.

Lemme des limites : soit $a \in \overline{A}$ (fini ou non) et $f_n \underset{u}{\to} f$ sur A vérifiant $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = \ell_n$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell_n$ existe alors l'autre existe et vérifie :

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f(x) \right)$$

(majoration triple et convergence uniforme).
Si l'on suppose F de dimension finie, alors on a l'existence de ces limites ($\ell_{n_0} - \ell_n$ bornée donc admet une sous-suite convergente).

13.2 Séries de fonctions

Convergence de série : on définit la convergence simple, uniforme, uniforme au voisinage de... d'une série comme la convergence de ses sommes partielles.
Pour montrer une convergence uniforme, il suffit de montrer la convergence simple puis la convergence de reste en norme infini vers 0.

Limites et continuité : soit $(u_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction et $a \in A$. Si $\sum u_n$ converge uniformément au voisinage de a et pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue en a, alors la limite $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue en a

Intervertion de limite : soit $(u_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$ avec F de dimension finie. Soit $a \in \overline{A}$ tel que $\sum u_n$ converge uniformément sur un voisinage de A et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to a} u_n(x) = \alpha_n$, alors $\sum \alpha_n$ converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = \lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

Convergence normale : $\sum u_n$ converge normalement si $\sum \mathcal{N}_\infty(u_n)$ converge. Si $\sum u_n$ converge normalement alors $\forall x \in A, \sum u_n(x)$ converge absolument et $\sum u_n$ converge uniformément sur A.
La convergence normale sert donc à montrer la convergence de séries ou de suites via la série télescopique associée.

13.3 Intégration, dérivation, primitivation d'une limite

Intégration : soit $(f_n) : J \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions continues sur un segment convergeant uniformément sur J vers f (donc continue), la suite (f_n) converge en moyenne (norme 1) vers f et l'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_J f_n = \int_J f$$

Si $\sum u_n$ est une série de fonctions continues qui converge uniformément sur le segment J, on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_J u_n = \int_J \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Primitivation : soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I et (g_n) la suite des primitives de (f_n) s'annulant en a. Si (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f (qui est donc continue) alors (g_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive de f s'annulant en a

Dérivation : soit $(g_n) \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers g tel que (g_n') converge uniformément sur tout segment de I vers f. On a alors (g_n) converge uniformément sur tout segment de I vers g, $g \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $g' = f$

Dérivées n-ièmes : soit $(f_n) \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{K})$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant :
- $\forall i \in [\![0,\ k-1]\!]$, $\left(f_n^{(i)}\right)$ converge simplement sur I vers φ_i
- $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur I vers φ_k

Alors $f = \varphi_0$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et $\forall i \in [\![0,\ k]\!]$, $f^{(i)} = \varphi_i$

Cas des séries : soit $\sum u_n$ une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ convergeant simplement sur tout segment de I telle que $\sum D(u_n)$ converge uniformément sur tout segment de I. Alors $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I, sa somme est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie

$$D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} D(u_n)$$

De même que pour les suites, si $u_n \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{K})$ tel que $\sum u_n^{(i)}$ converge simplement si $i < k$ et uniformément sur tout segment si $i = k$, alors la série converge uniformément et sa somme est de classe $\mathscr{C}^k$ avec : $D^{(i)}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} D^{(i)}(u_n)$

Application à l'étude de fonction : pour trouver un équivalent d'une série aux bornes de son intervalle de définition, on peut essayer de le deviner puis utiliser l'interversion de limites. Sinon on peut toujours utiliser une comparaison série-intégrale.

13.4 Approximation des fonctions d'une variable réelle

Approximation uniforme : soit $f \in \mathcal{B}(J, \mathbb{K})$ et $X \subset \mathcal{B}(J, \mathbb{K})$, on a les équivalences :
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in X, \mathcal{N}_\infty(f - \varphi) \leqslant \varepsilon$
- $\exists (\varphi_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tel que $\varphi_n \underset{u}{\to} f$ sur J
- $f \in \overline{X}$

On dit alors que l'on peut approcher uniformément f par des fonctions de X

Approximation en escalier : on peut approcher uniformément toute fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier (théorème de Heine). On peut généraliser ces résultats aux fonctions continues par morceaux sur un segment, car elles peuvent s'écrire comme somme d'une fonction en escalier et d'une fonction continue.

Approximation affine par morceaux continus (HP) : on peut approximer uniformément toute fonction continue par une fonction affine par morceaux continue

Théorème de Weierstrass : Toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([a, b])$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales à valeurs dans $\mathbb{K}$

Démo HP, passer par l'approximation affine ou par convolution (dirac...)

14 Convergence dominée et application

14.1 Suites et séries d'intégrales

La convergence uniforme sur une partie bornée implique la convergence intégrale, il y a d'autres critères plus généraux qui assurent cette convergence.

Théorème de convergence dominée : soit $(f_n) \in \mathscr{C}_{\text{pm}}(I, \mathbb{K})$ avec I un intervalle. On fait les hypothèses suivantes :
- $(f_n) \underset{s}{\to} f$ sur I
- f continue par morceaux sur I
- $\exists \varphi \in \mathscr{C}_{\text{pm}}(I, \mathbb{K})$ intégrable, telle que $\forall t \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$

Alors les f_n et f sont intégrables sur I et $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_I f_n = \int_I f$

Convergence terme à termes : soit $\sum u_n$ une série de fonctions
- $\sum u_n$ converge simplement sur I
- $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est continue par morceaux et intégrable sur I
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue par morceaux sur I
- $\sum \int_I u_n$ converge

Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable et $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$

On peut développer f continue en série pour calculer son intégrale, la continuité est alors évidente. Si ce théorème ne s'applique pas, on intègre terme à terme en montrant que $\lim \int_I R_n = 0$

14.2 Intégrales à paramètre

Continuité : soit A une partie non vide d'un EV normé de dimension finie, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \to \mathbb{K}$. Si
- $\forall t \in I, x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A
- $\forall x \in A, t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I
- $\exists \varphi I \to \mathbb{K}$ intégrable telle que $\forall x \in A, \forall t \in I, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

alors $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur A.
Remarque : si pour tout point $a \in A$, f est dominée sur un voisinage V de a, la conclusion subsiste.

Limites d'intégrales : soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ et a adhérent à A (peut-être infini), si
- $\forall x \in A,\ t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I
- il existe $f_a : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux telle que $\forall t \in I$, $\lim\limits_{x \to a} f(x,t) = f_a(t)$
- il existe $\varphi : I \to \mathbb{K}$ intégrable telle que $\forall x \in A, \forall t \in I, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

alors $\lim_{x \to a} \int_I f(x,t)\mathrm{d}t = \int_I f_a(t)\mathrm{d}t$. La encore, la domination au voisinage de A suffit.

Dérivation d'une intégrale : soit $f : J \times I \to \mathbb{K}$, si
— $\forall x \in J, t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I
— $\forall t \in I, x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J
— $\forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I
— il existe $\varphi : I \to \mathbb{K}$ intégrable telle que $\forall x \in J, \forall t \in I, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$

Alors $g(x) : \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et de dérivée $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$

On a le même théorème pour la classe $\mathscr{C}^n$ en exigeant que
— $\forall k \in [\![0,\ n-1]\!]$, $\forall x \in J,\ t \mapsto \frac{\partial[}{\partial k}]fx(x,t)$ est intégrable sur I
— $\forall t \in I, x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J
— $\forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial[}{\partial n}]fx(x,t)$ est continue par morceaux sur I
— il existe $\varphi : I \to \mathbb{K}$ intégrable telle que $\forall x \in J, \forall t \in I, \left|\frac{\partial[}{\partial n}]fx(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$

Là encore, la domination au voisinage de tout point ou sur tout segment suffit.

15 Fonction vectorielle d'une variable réelle

On considère les fonctions de I intervalle de $\mathbb{R}$ dans E de dimension finie. On note p_i les projecteurs sur une base et $q_i : t \mapsto te_i$. Ainsi on obtient les fonctions composantes

$$f_i = p_i \circ f \qquad f = \sum q_i \circ f_i$$

15.1 Dérivation

Définition : la fonction f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ admet une limite $\ell \in E$ en a. Cette limite est la dérivée.

C'est équivalent à $\exists \ell \in E, f(t) = f(a) + \ell(t-a) + \mathrm{o}(t-a)$
— si f est dérivable en a, alors elle y est continue
— on peut définir la dérivée à droite et à gauche comme limites droites et gauches du taux d'accroissement. f est dérivable en a ssi elle l'est à droite et à gauche avec même dérivée, sauf si a est une borne de I
— la dérivabilité à gauche entraine la continuité à gauche.

f est continûment dérivable (classe $\mathscr{C}^1$) si elle est dérivable sur I et f' continue sur I.

Propriétés :
— pour $T : E \to F$ linéaire et f dérivable, $T \circ f$ est dérivable de dérivée $T \circ f'$
— f est de classe $\mathscr{C}^1$ ou dérivable si et seulement si ses fonctions coordonnées dans une base le sont. Les fonctions coordonnées de f' sont alors les dérivées de celles de f (conséquence de ci-dessus, car p_i linéaire)

— D est linéaire : $D(\lambda f + \mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g)$
— $\mathcal{D}(I, E)$ et $\mathscr{C}^1(I, E)$ sont des sev de $\mathscr{C}(I, E)$

Dérivée d'un produit : soit $f : I \to E, g : I \to F$ et $b : E \times F \to G$ bilinéaire.

$$f \in \mathscr{C}^1 \text{ et } g \in \mathscr{C}^1 \ \Rightarrow \ B(f, g) \in \mathscr{C}^1 \text{ et } (B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$$

Résultat qui se généralise à une fonction p-linéaire (notamment le déterminant)

Dérivée d'une composée : soit $\varphi : I \to J$ dérivable en t_0 et $f : J \to E$ dérivable en $\varphi(t_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et $(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0) f'(\varphi(t_0))$ (prolonger le taux d'accroissement)

Inégalité des accroissements finis : $I = [a, b]$, $f : I \to E$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ telles que
— f et φ sont continues sur $[a, b]$
— f et φ sont dérivables sur $]a, b[$
— $\forall t \in]a, b[, \|f'(t)\| \leqslant \varphi'(t)$

alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \varphi(b) - \varphi(a)$.
On en déduit que si $\|f'\| \leqslant M$ alors f est M-lipschitzienne et que si $f' = 0$ alors f est constante.

Classe $\mathscr{C}^k$: on la définit comme sur $\mathbb{R}$: f est n fois dérivable s'il existe $(\varphi_0, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{n+1}$ telles que $\varphi_0 = f$ et $\varphi_{k+1} = \varphi_k'$, il y a alors unicité d'une telle liste.
— $\mathscr{C}^k(I, E)$ et $\mathcal{D}^k(I, E)$ sont des SEVs de $\mathscr{C}(I, E)$.
— composition par une application linéaire T : $(T(f))^{(k)} = T(f^{(k)})$
— $f \in \mathscr{C}^k \Leftrightarrow \forall i, f_i \in \mathscr{C}^k$ $((f^{(k)})_i = (f_i)^{(k)})$
— si f et g sont de classe $\mathscr{C}^k$ et B est bilinéaire, alors $t \mapsto B(f, g) \in \mathscr{C}^k$ et

$$B(f, g)^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} B(f^{(i)}, g^{(k-i)})$$

— si $\varphi \in \mathscr{C}^k(I, J)$ et $f \in \mathscr{C}^k(J, E)$ alors $f \circ \varphi \in \mathscr{C}^k(I, E)$ (récurrence sur k)

15.2 Intégration

Définition : soit f continue par morceaux sur $[a, b]$, il existe un unique élément de E, noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ tel que pour toute forme linéaire φ, on ait $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \circ f = \varphi\left(\int_{[a,b]} f\right)$
En effet $\varphi \mapsto \int_{[a,b]} \varphi \circ f$ est une forme linéaire de E^*, or $(E^*)^*$ en bijection avec E
On a alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum \left(\int_{[a,b]} f_i\right) e_i$ (définition du programme)

Propriétés :
- l'intégrale est linéaire
- pour T linéaire, $T(\int_{[a,b]} f) = \int_{[a,b]} T \circ f$
- relation de Chasles : $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$
- $f \mapsto \int_{[a,b]} f$ est continue sur $\mathscr{C}_{pm}([a,b],E)$ (linéarité, normes équivalentes et fonctions composantes)

Inégalité triangulaire : le SEV des fonctions en escalier est dense dans $\mathscr{C}_{pm}([a,b],E)$, on en déduit par densité l'inégalité triangulaire :

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$$

Corollaire : $\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant (b-a)N_\infty(f)$

Sommes de Riemann : pour $(u_0, \dots, u_n)$ une subdivision de $[a,b]$ et $(v_1, \dots, v_n)$ tel que $v_i \in [u_{i-1}, u_i]$, on appelle somme de Riemann la quantité

$$\sigma(f,u,v) = \sum_{i=1}^{n} (u_i - u_{i-1}) f(v_i)$$

Si f est continue par morceaux, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si le pas de u est inférieur à η, alors $\left\| \int_{[a,b]} f - \sigma(u,v,f) \right\| \leqslant \varepsilon$

15.3 Primitivation et intégration

On définit l'intégrale orientée comme pour les réels, elle vérifie Chasles et l'inégalité triangulaire.

Primitive : g est une primitive de f si elle est dérivable et $g' = f$. Deux primitives diffèrent d'une constante si I est un intervalle.

Théorème fondamental : soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(I,E)$ et $a \in I$, on pose $g_a = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.
- g_a est dérivable à droite en tout point de $x \neq \sup I$ avec $(g_a)'_d(x) = f(x^+)$
- g_a est dérivable à gauche en tout point $x \neq \inf I$ avec $(g_a)'_g(x) = f(x^-)$

Donc g est continue sur I et dérivable en tout point ou f est continue. C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Pour tout $(\alpha,\beta) \in I^2$, on a $\int_\alpha^\beta f = g(\beta) - g(\alpha)$

Intégration par parties : soit $f : I \to E, g : I \to F$ et $b : E \times F \to G$ bilinéaire, pour $(a,b) \in I^2$ on a :

$$\int_a^b B(f'(t),\, g(t))\mathrm{d}t = [B(f(t),\, g(t)]_a^b - \int_a^b B(f(t),\, g'(t))\mathrm{d}t$$

Changement de variable : soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(J,I)$ et f continue sur I, on a pour $(a,b) \in J^2$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\mathrm{d}t$$

Intégrales généralisées (HP) : on la définit de même que pour les réels, ainsi que la convergence absolue. Si $\int_I f$ converge et T linéaire, alors $\int_I T \circ f$ converge et $\int_i T \circ f = T(\int_I f)$. La convergence est donc équivalente à la convergence des fonctions composantes. La convergence absolue implique donc la convergence.

15.4 Formules de Taylor

Taylor reste intégral : soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,E)$, on a pour $(a,b) \in I^2$

$$\begin{aligned} f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) &= \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \\ &= (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} f^{(n+1)}((b-a)x+a)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Formule de Taylor-Lagrange : pour $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,E)$, $(a,b) \in I^2$ et M_{n+1} un majorant de $\left\|f^{(n+1)}\right\|$ sur $[a,b]$, on a

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left\|(b-a)^{n+1}\right\|$$

Formule de Taylor-Young : soit $f : I \to E$ une fonction $n-1$ fois dérivable sur I et n fois dérivable en $a \in I$ (classe $\mathscr{C}^n$ dans le programme). Alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underset{x \to a}{\mathrm{o}} \left((x-a)^n\right)$$

15.5 Intégration, dérivation, primitivation d'une limite

Intégration : soit (f_n) continues convergeant uniformément sur le segment J vers f. Alors f est continue et $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_J f_n = \int_J f$. EN termes de séries, si $\sum u_n$ converge uniformément sur J et les u_n sont continues alors la série des intégrales converge et $\int_J \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_J u_n$

Primitivation : si (f_n) est une suite de fonctions continues sur I convergeant uniformément sur tout segment vers f (alors continue), et (g_n) est la suite des primitives des f_n s'annulant en $a \in I$, alors cette suite converge uniformément sur tout segment vers la primitive de f nulle en a. (proposition ci-dessus et théorème fondamental)

Dérivation : soit $(g_n) \in \mathscr{C}^1(I,E)^{\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers g sur I telle que (g_n') converge uniformément sur tout segment vers f. Alors g est de classe $\mathscr{C}^1$ et $g' = f$ et (g_n) converge uniformément sur tout segment.
On obtient par récurrence immédiate la version $\mathscr{C}^k$ (convergence simple de toutes les dérivés et uniforme de la k-ième)

16 Familles sommables

16.1 Famille sommable de réels positifs

Définition : soit I un ensemble et $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$ une famille de réels positifs. On note

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} a_i \text{ , } J \text{ fini } \subset I\right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

On dit que (a_i) est sommable si sa somme est finie

Propriétés :
- une famille finie est sommable et sa somme correspond à sa somme
- une suite (u_n) est sommable $\Leftrightarrow \sum u_n$ converge et alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
- la somme d'une famille de réels positifs est le plus petit M tel que pour toute sous famille finie J de I on ait $\sum_J a_i \leqslant M$
- la somme est nulle si et seulement si la famille est nulle
- pour deux familles (a_i, b_i), si $\forall i, a_i \leqslant b_i$ alors $\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{i\in I} b_i$ donc (b_i) sommable $\Rightarrow (a_i)$ sommable.

Changement d'indice : soit $\sigma : J \to I$ bijective et $(a_i) \in \mathbb{R}_+^I$.

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{\sigma(j)}$$

On en déduit la commutativité (si σ est une permutation)

Linéarité : soit (a_i) et (b_i) deux familles sommables de réels positif et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Les familles $(a_i + b_i)$ et (λa_i) sont sommables de sommes $\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$ et $\lambda \sum_{i\in I} a_i$ (démo par la série dans le cas dénombrable (au programme))

Sommation par paquets : si $J \subset I$, on a $\sum_{i\in J} a_j \leqslant \sum_{i\in I} a_i$ donc la sommabilité sur I implique celle sur J.
Pour deux ensembles disjoints I et J et $(a_i)_{i\in I\cup J} \in \mathbb{R}_+^{I\cup J}$ on a

$$\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i = \sum_{i\in I\cup J} a_i$$

Plus généralement, si $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une partition de I (contenant éventuellement des ensembles vides) et $(a_i) \in R_+^I$, on a

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda} a_i\right)$$

Au programme : partition $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_i)_{i\in I_n}$ sommable noté σ_n et $\sum \sigma_n$ converge.

16.2 Familles sommables de nombres complexes

Définition : $(a_i) \in \mathbb{C}^I$ est sommable si la famille $(|a_i|) \in \mathbb{C}^I$ est sommable.
Pour les réels on définit la somme d'une famille sommable par $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-$ avec $a_i^+ = \max(a_i, 0)$ et $a_i^- = \max(-a_i, 0)$. Cela prolonge la définition sur $\mathbb{R}_+$.
Pour les complexes, on la définit par $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(a_i) + i\sum_{i\in I} \mathrm{Im}(a_i)$

Propriétés :

- la sommabilité correspond à l'absolue convergence des séries et les sommes sont alors égales
- la somme vérifie l'inégalité triangulaire : $\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |a_i|$
- on a le même théorème de changement d'indice
- l'espace des familles sommable est un EV sur lequel la somme est une forme linéaire
- sommation par paquets : si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable alors pour (I_λ) une partition, $\forall\lambda$, $(a_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable notée σ_λ et (σ_λ) est sommable avec

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda} \sigma_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda} a_i\right)$$

Extension aux espaces vectoriels de dimension finie : une famille $(a_i) \in E^I$ est sommable si la famille de réels positifs $(\|a_i\|)$ l'est. Il existe alors un unique élément $\sum_I a_i$ tel que pour tout $\varphi \in E^*$, $\varphi(\sum_I a_i) = \sum \varphi(a_i)$ (car $\varphi \mapsto \sum_I \varphi(a_i$ est une forme linéaire du dual...)
On obtient alors pour T linéaire, $(T(a_i))$ sommable et $T(\sum_I a_i) = \sum_I T(a_i)$ (d'où l'équivalence sommabilité, sommabilité des composants dans une base)
On conserve les propriétés de changements d'indice, sommation par paquets et correspondance avec une somme finie ou de série.

16.3 Applications

Théorème de Fubini : repose sur les partitions

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{p\} \times \mathbb{N} = \bigcup_{q\in\mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{q\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \,/\, p+q=n\right\}$$

Pour $(a_{p,q})$ une famille on a les équivalences :
- $(a_{p,q})$ est sommable
- $\forall p \in \mathbb{N}, \sum_q \|a_{p,q}\|$ converge et $\sum_p \sum_{q=0}^{\infty} \|a_{p,q}\|$ converge
- $\forall q \in \mathbb{N}, \sum_p \|a_{p,q}\|$ converge et $\sum_q \sum_{p=0}^{\infty} \|a_{p,q}\|$ converge
- $\sum_n \sum_{p+q=n} \|a_{p,q}\|$ converge

Dans ce cas : $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p+q=n} a_{p,q}$

Produit de Cauchy : soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles d'une algèbre munie d'une norme sous-multiplicative. Si elles sont sommables alors (a_ib_j) l'est également et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} a_j\right)$$

Pour $\sum a_n$ et $\sum b_n$ absolument convergent, $\displaystyle\sum \sum_{p+q=n} a_pb_q$ est la série produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$. Elle converge absolument et vérifie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{p+q=n} a_pb_q$

16.4 Exponentielle dans une algèbre de dimension finie

Définition : pour $a \in A$, la famille $\frac{a^n}{n!}$ est sommable. On note sa somme $\exp(a)$. La convergence étant normale sur toute boule fermée, exp est continue. Enfin $e_a : t \mapsto \exp(ta)$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $e_a' = a \times e_a = e_a \times a$.
Pour φ un isomorphisme d'algèbre, on a $\exp(\varphi(a)) = \varphi(\exp(a))$. On en déduit que dans une algèbre, si $ab = ba$ alors $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$. Donc pour tout a, $\exp(a)$ est inversible d'inverse $\exp(-a)$

17 Séries entières

17.1 Rayon de convergence d'une série entière

Définitions : une série entière est une série de fonctions de terme général $(a_n z^n)$. L'ensemble de convergence est l'ensemble de $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels elle converge.

Lemme d'Abel et rayon de convergence : pour $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)$ est borné, on a pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.
On appelle rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z_n$ la borne supérieur dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ de $\{r \in \mathbb{R}_+ \,/\, (a_n r^n) \text{ bornée}\}$. On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument et $|z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge grossièrement. On n'a pas d'information si $|z| = R$.
On appelle disque ouvert de convergence la boule $B_o(0, R)$ et intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

Comparaison de rayons : soit $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n b^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b.
- si $\forall n,\ a_n \leqslant b_n$ alors $R_b \leqslant R_a$
- si $a_n = O(b_n)$ alors $R_b \leqslant R_a$
- si $a_n \sim b_n$ alors $R_b = R_a$

Enfin les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Règle de d'Alembert : on peut s'en servir sur les séries pour déterminer l'absolue convergence (donc $|z| < R$ et l'absolue divergence $|z| \geqslant R$. Pour cela, si a_n ne s'annule pas APDCR et $\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z_n}\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell < 1$ il y a absolue convergence et si $\ell > 1$ non.

Continuité de la somme : la fonction $\sum a_n z^n$ converge normalement sur toute boule $\mathcal{B}_f(0, r)$ avec $r < R$, elle est donc continue sur $\mathcal{B}_o(0, R)$.
La fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ admet un DL à tout ordre n en 0 donné par ses sommes partielles.
Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R < \infty$ et que $\sum |a_n| R^n$ converge, alors il y a convergence normale sur le disque fermé $B_f(0, R)$ donc continuité sur ce disque.

Opérations sur les séries : soit $a_n z^n$ et $b_n z^n$ sont des séries entières de rayons de convergence R_a et R_b
- <u>somme :</u> $R_{a+b} \geqslant \min\{R_a, R_b\}$ avec égalité si $R_a \neq R_b$
- <u>décalage d'indice</u> pour $p \in \mathbb{N}$, les séries $\sum a_n z^{n+p}$ et $\sum_{n \geqslant p} a_n z^{n-p}$ ont même rayon de convergence R_a.

— produit : $\sum \sum_{p+q=n} a_p b_q z_n$ a pour rayon de convergence $R_{ab} \geqslant \min\{R_a, R_b\}$ et si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right)$$

17.2 Série entières d'une variable réelle

Série dérivée : si $a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors sa somme est dérivable sur $[-R, R]$ avec pour dérivée $\sum n a_n x^{n-1}$
Comme $n a_n x^n$ a même rayon de convergence que $a_n x^n$, on en déduit que la somme est $\mathscr{C}^\infty$ avec

$$\forall p \in \mathbb{N}, \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=p}^{\infty} p! \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} x^{n-p}$$

Série de Taylor : pour $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ avec $0 \in I$ on appelle série de Taylor de f la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Une série entière de rayon de convergence strictement positive est *la* série de Taylor de sa somme.
Par unicité, si deux séries entières de rayon de convergence strictement positive ont une somme qui coïncide sur un intervalle voisinage de 0, elles sont égales.

Dérivabilité en 1 (HP) : soit (a_n) positive telle que $\sum a_n$ converge. $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ est dérivable en 1 si et seulement si $\sum n a_n$ converge. ($\Leftarrow$ convergence dominée, $\Rightarrow$ par divergence de la dérivée vers $+\infty$ (contraposée))

Primitivation : $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une primitive sur $]-R, R[$ de $\sum a_n x^n$
On ne peut intégrer que sur les segments de $]-R, R[$ dans le cas général

Formule de Cauchy (HP) : à partir de f la somme d'une série entière $a_n z^n$, on peut retrouver les a_n car pour $r < R$ et $n \in \mathbb{N}$ on a (intégration termes à termes)

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta$$

17.3 Fonction développable en série entière

DÉFINITION : soit $R > 0$, une fonction f est développable en série entière sur $]-R, R[$ s'il existe une série $\sum a_n x^n$ d rayon de convergence $R' \geqslant R$ telle que

$$\forall h \in]-R, R[,\ f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$$

Elle est développable en série entière s'il existe un tel R. On dit qu'elle est développable en série entière au voisinage de x_0 si $h \mapsto f(x_0 + h)$ est développable en série entière. f est analytique si elle est développable en série entière au voisinage de tout point.

Lien avec la série de Taylor :

— f est développable en série entière sur $]-R, R[\Leftrightarrow f \in \mathscr{C}^\infty$ et $\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

— f est développable en série entière sur $]-R, R[\Leftrightarrow$ le reste de Taylor de f ($\neq$ reste de la série de Taylor) converge simplement vers 0 (majoration de Taylor-Lagrange ou Taylor reste intégral)

Fonctions usuelles : on peut utiliser dérivée, primitive, somme et produit de Cauchy pour trouver les séries :

- $\forall x \in \mathbb{C},\ e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$
- $\forall |z| < 1,\ \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^2$ puis par primitivation de $\dfrac{1}{1+z}$ et $\dfrac{1}{1+z^2}$
- $\forall x \in]-1, 1[,\ \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ et $\operatorname{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
- $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et de même pour sin, sh, ch
- $(1+z)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} z^n$

Les fractions rationnelles à pôles non nulles sont décomposables en série entière sur $D(0, R)$ avec R le module minimal de leurs pôles.

Méthode de l'équation différentielle : en connaissant un équa diff vérifiée par f :

— si l'on sait que f admet un DESE, on cherche une relation sur les coeffs en utilisant l'équation puis on conclut par unicité de du DESE

— si l'on veut le montrer, on trouve une SE solution et on exploite l'unicité des solutions de l'équation différentielle.

18 Espaces probabilisés

18.1 Espaces probabilisés

Tribu : soit Ω un univers, et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{A}$ est une tribu si
- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $\forall A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$
- pour I dénombrable et $\forall (A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I, \displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$

Une tribu est alors stable par intersection au plus dénombrable, par union finie et par soustraction ensembliste. $\mathcal{P}(\Omega)$ est la plus grande tribu possible. Une intersection de tribus est une tribu, donc pour tout $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, il existe $\sigma(\mathcal{F})$ une plus petite tribu contenant $\mathcal{F}$.
Un couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable, Ω est l'univers et les éléments de $\mathcal{A}$ sont les évènements.

Probabilité : soit $(\Omega,\ \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Une probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ doit vérifier :
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- pour $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux-à-deux incompatibles, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé

Une probabilité vérifie alors :
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- pour $A_1, \dots, A_n$ incompatibles, $\mathbb{P}(A_1 + \ldots + A_n = \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)$
- pour $A \subset B$, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - Prob(A)$ donc $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A + B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (formule du crible)

Un évènement est négligeable s'il est de probabilité nulle et presque sûr s'il est de probabilité 1.

Système complet d'évènements : c'est une famille (A_i) au plus dénombrable d'évènements deux-à-deux disjoints et d'union Ω.
La famille $(\mathbb{P}(A_i))$ est alors sommable de somme 1, et pour tout évènement B, $(\mathbb{P}(B\cap A_i))$ est sommable de somme $\mathbb{P}(B)$

Continuité monotone : pour (A_n) une suite d'évènements de $\mathcal{A}$ croissants ($A_n \subset A_{n+1}$), on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

de même pour l'intersection d'une suite d'évènements croissants (démo : poser $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$)
On en déduit notamment $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim\limits_{N \to \infty} \mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{N} A_n)$ pour toute suite d'événements.

Inégalité de Boole : pour $(A_1, \ldots, A_n, \ldots)$ des évènements :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{p=0}^{n} A_p\right) \leqslant \sum_{p=0}^{n} \mathbb{P}(A_p) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=0}^{+\infty} A_p\right) \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p)$$

Probabilité sur un univers dénombrable : on peut prendre $\mathcal{P}(\Omega)$ comme tribu et caractériser une probabilité par la suite $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positif sommable de somme 1.

Probabilité sur un univers au plus dénombrable : on peut avoir tous les évènements élémentaires de probabilité nulle (pile ou face infini), on prendra souvent pour tribu différente de $\mathcal{P}(\Omega)$

Probabilité image (HP) : pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $f : \Omega \to \Omega'$, on a $\mathcal{A}' = \left\{Y \in \Omega' \,/\, f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}\right\}$ est une tribu et $Y \mapsto \mathbb{P}(f^{-1}(Y))$ est une probabilité sur Ω'

18.2 Probabilité conditionnelle

Définition : Pour A non-négligeable, on pose $\mathbb{P}_A : B \mapsto \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$. C'est une probabilité.

— Probabilités composées : pour $(A_1, \ldots, A_n)$ non négligeables, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

— Probabilités totales, pour (A_i) un système complets d'événements tous non-négligeables :

$$\forall B \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(B) = \sum \mathbb{P}(A \cap B) = \sum \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)$$

— Formules de Bayes : pour A et B non négligeables $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B) \times \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$

Indépendance d'événements : soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'événements, on dit que les (A_i) sont indépendants

— 2-à-2 si $\forall(i,j)\in I^2, i\neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i\cap A_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$

— mutuellement si $\forall J\subset I$ fini, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right)=\prod_{i\in J}\mathbb{P}(A_i)$

l'indépendance mutuelle implique la 2-à-2 (réciproque fausse). L'indépendance ne dépende pas de l'ordre des A_i et reste vraie pour toute sous-famille ou famille constituée des complémentaires.

19 Variables aléatoires

19.1 Variable aléatoires discrètes

Définition : soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X:\Omega\to E$. X est une variable aléatoire discrète si :

— $X(\Omega)$ est au plus dénombrable

— $\forall x\in X, X^{-1}(\{x\})$ est un événement noté $\{X=x\}$

Alors, pour tout $A\subset X(\Omega)$, $\{X\in A\}=X^{-1}(A)$ est un événement

Loi d'une variable aléatoire discrète : $\mathbb{P}_X : \left(\begin{array}{ccc}\mathcal{P}(X(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(\{X\in A\})\end{array}\right)$ est une probabilité, appelé loi de la variable aléatoire X, sur l'univers au plus dénombrable $X(\Omega)$,

— on peut aussi la voir comme loi sur $(E,\mathcal{P}(E)$ en posant $\mathbb{P}_X(\{\omega\})=0$ pour $\omega\in E\setminus X(\Omega)$

— s'il existe $a\in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(\{X=a\})=1$ on dit que X est presque surement constante

— $(\{X=x\})_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événement dont les probabilités caractérisent la loi de X

— $X\sim Y$ si $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$ (on dit qu'elles ont même loi), i.e. si $X(\Omega)=Y(\Omega)$ et $\forall x\in X(\Omega), \mathbb{P}(\{X=x\})=\mathbb{P}(\{Y=x\})$

Propriétés :

— pour E au plus dénombrable et (p_e) une famille de réels positifs de somme 1, il existe $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et $X:\Omega\to E$ tel que $\mathbb{P}_X(\{e\})=p_e$

— pour X un VA et $f:X(\Omega)\to G$, $f\circ X$ est une variable aléatoire notée $f(X)$

19.2 Lois usuelles

Loi géométrique : $X\sim\mathcal{G}(p)$ avec $p\in]0,1[$ si $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{X=n\})=qp^{n-1} \qquad q=1-p$$

Elle sert à modéliser le premier succès dans une répétition infinie d'épreuves de Bernoulli.

— $\mathbb{P}(\{X > n\}) = q^n$

— $\exists p \in]0,1[,\ X \sim \mathcal{G}(p) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (n,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbb{P}_{\{X>\ell\}}(\{X > n+\ell\}) = \mathbb{P}(\{X > k\}) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{X = n\}) > 0 \end{cases}$

Loi de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

— pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VA telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et $np_n \to \lambda > 0$, alors $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ (convergence en loi)

— si X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) avec n grand, elle suit approximativement une loi de Poisson.

— cette loi permet de décrire le nombre d'évènements d'un certain type se produisant pendant une période T

19.3 Couples de variables aléatoires

Définition : pour X et Y deux variables aléatoire discrète à valeurs dans E et E', le couple $(X,Y) : \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est une variable aléatoire discrète.
Réciproquement, pour X une variable aléatoire discrète à valeur dans un produit cartésien, les coordonnées de X sont des variables aléatoires discrètes.
$(\{X = x\} \cap \{Y = y\})_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est le système complet d'évènement associé au couple (X,Y). On en déduit que

— $\displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = 1$

— si E est un espace vectoriel ou une algèbre, alors l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur E l'est aussi (somme : image du couple par une application)

Ces notions se généralisent facilement au n-uplets, et les théorèmes suivants restent vrais.

Loi conjointe : c'est la loi du couple, elle est déterminée par $\big(\mathbb{P}(\{X = x\}\cap\{Y = y\})\big)_{(x,y)\in X(\Omega)}$
De même pour E et E' au plus dénombrable et une famille $(p_{x,y})$ de réels positifs de somme 1, il existe X, Y de variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = p_{x,y}$

Loi marginale : ce sont les lois des coordonnées, elles s'obtiennent à partir de la loi conjointe :

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Lois conditionnelles : pour $y \in Y(\Omega)$ non négligeable, on définit la loi de X sachant $\{Y = y\}$, c'est la loi de X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_{\{Y=y\}})$

- $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X = x)$
- donc $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega), \mathbb{P}(Y=y) \neq 0} \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X = x)$

19.4 Indépendance de variables aléatoires

Définition : deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si :

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes 2-à-2 si elles sont indépendantes 2-à-2 et sont mutuellement indépendante si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod X_i(\Omega), \mathbb{P}(X_1 = x1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

- l'indépendance de deux VA équivaut à la loi conjointe de la forme $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \varphi(x)\psi(y)$
- si X, Y sont indépendants à valeurs dans E et F et $A \subset E$, $B \subset F$ alors
$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$
- pour $f : E \to E'$ et $g : F \to F'$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes

Caractérisation de l'indépendance : pour X, Y deux variables aléatoires discrètes, on a les équivalences

- X et Y sont indépendantes
- $\forall y \in Y(\Omega),$ si $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$ alors $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X = x)$
(la loi conditionnelle est la même que la conjointe)
- $\forall x \in X(\Omega),$ si $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ alors $\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}_{\{X=x\}}(Y = y)$

Loi de la somme : soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{p+q=n} \mathbb{P}(X = p)\mathbb{P}(Y = q)$$

ces sommes sont infinies dans le cas $\mathbb{Z}$

Propriétés de n-uplets : soit $(X_1, \dots, X_n)$ mutuellement indépendantes

- toute sous-famille $(X_i)_{i \in I}$ avec $I \subset [\![1, n]\!]$ est mutuellement indépendante
- l'indépendance mutuelle implique l'indépendance 2-à-2

— l'indépendance équivaut à l'existence de fonctions φ_i telles que $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod \varphi_i(x_i)$
— $(f_1(X_1), \dots, f_n(X_n))$ sont indépendantes
— lemme des coalitions : $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Suite de variable aléatoire indépendantes : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de VA mutuellement indépendante si pour tout $I \subset \mathbb{N}$ fini, les variables $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes

Théorème de Kolmogorov : pour $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de loi de probabilités discrètes. Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires telles que $\mathbb{P}_{X_n} = \mathbb{P}_n$

19.5 Espérance

Définition soit X un variable aléatoire discrète réelle :
— si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, on définit l'espérance par $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(\{X = x\}) \in \overline{\mathbb{R}_+}$
— si $(\mathbb{P}(\{X = x\}))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, on la définit de même
Certaines variables aléatoires réelles n'ont donc pas d'espérance

Loi usuelle : la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ a pour espérance $\frac{1}{p}$, la loi de Poisson de paramètre λ a pour espérance λ

Théorème de transfert : pour X une variable aléatoire réelle et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$, $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si $(f(x)\mathbb{P}(\{X = x\}))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et $\mathscr{E}(f(X)) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$

Linéarité et croissance de l'espérance :
— pour X d'espérance finie et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda\mathbb{E}(X)$
— pour X et Y positives, on a $X + Y$ d'espérance finie si et seulement si X et Y sont d'espérance finie et $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
— pour X et Y d'espérance finie, $X + Y$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
— pour X positive, $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(X) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X = 0) = 1$
— pour $Y \geqslant X$ on a $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$
— X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ l'est et $|\mathbb{E}(X)| = \mathbb{E}(|X|)$
Donc si $|X| \leqslant Y$ et Y d'espérance fini, alors $\mathbb{E}(X)$ existe et $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(Y)$.
Toute variable aléatoire bornée est donc d'espérance finie.

L'ensemble des VA d'espérance fini est un sev noté $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Inégalité de Markov : pour X une variable aléatoire discrète positive, on a

$$\forall a > 0,\, \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Moment d'ordre : on dit que X admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$ lorsque $\mathbb{E}(X^r)$ est finie. On note $L^r(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'ensemble des VA discrètes admettant un moment d'ordre r, c'est un espace vectoriel. SI X admet un moment d'ordre r, elle admet tous les moments inférieurs (HP sauf le cas $r = 2$)

Produit de variables aléatoires : XY est d'espérance finie si $(xy\mathbb{P}(X = x, Y = y))$ est sommable et $\mathbb{E}(XY) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)$.
Si X et Y sont indépendantes et d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, $\mathbb{E}(XY)$ est finie et

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) \qquad \text{Cauchy-Schwarz}$$

Variance : Pour X d'espérance finie telle que $X - \mathbb{E}(X)$ admettent un moment d'ordre deux, on pose $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)$ la variance de X.

- On a $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X * (X - 1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X^2)$ (Koenig-Huygens).
- La variance d'une loi géométrique est $\frac{1-p}{p^2}$ et celle d'une loi de Poisson est λ
- $aX + b$ admet un moment d'ordre 2 et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$
- Bienaymé-Tchebychev : soit X une VA admettant un moment d'ordre 2,

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

On pose $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$ l'écart-type. Une VA telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ est centrée et $\sigma(X) = 1$ et réduite. Pour X non presque surement constante, $\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est la variable centrée réduite associée.

Covariance : si $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$ admet une espérance, on l'appelle covariance du couple (X, Y).

- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ (Koenig-Huygens)
- $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$
- $(X, Y) \mapsto \mathrm{Cov}(X, Y)$ est bilinéaire symétrique positive (Cauchy-Schwarz)
- si X et Y sont indépendantes et d'espérance finie, alors $\mathrm{Cov}(X, Y)$ existe et est nul.

Variance d'une somme : pour $X_1, \dots, X_n$ des VA admettant un moment d'ordre 2 :

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

en cas de va 2-à-2 non corrélées, la somme des covariances est nulle.

Loi faible des grands nombres : soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires 2-à-2 indépendantes de même loi. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $m = \mathbb{E}(X_1)$, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

On dit que $\frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante m.

19.6 Fonctions génératrices

Définition : pour X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ on pose :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n = \mathbb{E}(t^X)$$

C'est une série entière qui converge normalement sur $\mathcal{B}_f(0, 1)$ donc est continue sur $[-1, 1]$

- la loi d'une variable est déterminée de manière unique par G_X : $\mathbb{P}(X = n) = n! G^{(n)}(0)$
- X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 et $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$
- X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si G_X est 2 fois dérivable en 1
- pour X et Y indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\forall t$ tel que $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ converge absolument, G_{X+Y} converge et $G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$

20 Groupe, anneaux, arithmétiques

20.1 Anneaux et corps

Anneau intègre : un anneau est intègre si

$$\forall (a, b) \in A^2,\ ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Tout élément non nul a est alors régulier, on a $ax = ay \Leftrightarrow x = y$

Sous-anneaux : soit A un anneau, B est un sous-anneau de A si

- $(B,\ +)$ est un sous-groupe de A
- B est stable par produit et contient 1_A

Un sous-anneau est un anneau. Un sous-corps est un sous-anneau qui est un corps.

Morphisme d'anneau : $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'anneau si

- $\forall (x,y) \in A^2$, $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- $\forall (x,y) \in A^2$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$
- $\varphi(1_A) = 1_B$

L'image directe ou réciproque d'un sous-anneau par un morphisme est un sous-anneau. Si φ est un isomorphisme, il en est de même pour φ^{-1}. Le noyau d'un morphisme est un idéal. Un morphisme est injectif si et seulement si son noyau est réduit à 0.

Anneau produit : pour A, B deux anneaux on définit l'anneau produit $A \times B$ muni de $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ et $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$. C'est un anneau, mais rarement intègre ($(0,1)(1,0) = (0,0)$).

Idéaux d'un anneau commutatif : un idéal I est un sous-groupe vérifiant $\forall x \in A, \forall a \in I, ax = xa \in I$. Toute intersection d'idéaux est un idéal et A est évidemment un idéal donc on peut définir le plus petit idéal engendré par une partie.
Pour I_1 et I_2 deux idéaux, $I_1 + I_2$ est un idéal (celui engendré par I_1 et I_2)

Congruence modulo un idéal : pour I un idéal de A, on peut définir l'anneau A/I des classes d'équivalences de la relation $x \equiv I \mod I \Leftrightarrow x - y \in I$ car cette relation est compatible avec les opérations ($x \equiv x'$ et $y \equiv y' \Rightarrow x + y \equiv x' + y'$ et $xy \equiv x'y'$)

20.2 Divisibilité dans un anneau intègre

Relation divise : pour A intègre et $(x,y) \in A^2$ on définit la relation "divise" par $x \mid y \Leftrightarrow \exists z \in A xz = y$.
C'est une relation transitive et réflexive, mais ni symétrique ni antisymétrique.

Relation d'association : on dit que x et y sont associés s'ils vérifient l'une des propositions équivalentes suivantes :

- $x \mid y$ et $y \mid x$
- $\exists u \in \mathcal{U}(A),\ x = yu$

Éléments irréductibles : $x \in A$ et dit irréductible si $x \notin \mathcal{U}(A)$ et tout diviseur de x est soit une unité, soit associé à x. On a l'équivalence :

$$x \text{ irréductible } \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin \mathcal{U}(A) \\ \forall (b,c) \in A^2,\ bc = x \Rightarrow b \in \mathcal{U}(A) \text{ ou } c \in \mathcal{U}(A) \end{cases}$$

Éléments premiers entre eux : deux éléments sont premiers entre eux si leurs seuls diviseurs communs sont des unités de A.

- deux irréductibles non-associés sont premiers entre eux

— si p irréductible et a quelconque, on a $p \mid a$ xor p et a sont premiers entre eux.

Lien avec les idéaux : on a l'équivalence :

$$x \mid y \Leftrightarrow yA \subset xA$$

D'où l'intérêt des idéaux engendré par un élément, ou idéaux principaux. Un anneau principal est un anneau dont tous les idéaux sont principaux. C'est le cas de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ (division euclidienne)

20.3 Arithmétique dans un anneau principal

PGCD et PPCM : pour $(a, b) \in A^2$ on définit :

— les pgcd de a et b sont les nombres générateurs de l'idéal $aA + bA$

$$d \text{ est un pgcd de } a \text{ et } b \Leftrightarrow \left[\forall x \in A, x \mid b \text{ et } x \mid a \Leftrightarrow x \mid d\right]$$

— les ppcm de a et b sont les nombres générateurs de l'idéal $aA \cap bA$

$$m \text{ est un ppcm de } a \text{ et } b \Leftrightarrow \left[\forall x \in A, a \mid x \text{ et } b \mid x \Leftrightarrow m \mid x\right]$$

On a le théorème de Bézout : pour d un pgcd de a et b $\exists (u, v) \in A^2$, $d = au + bv$ (équivalence si $d = 1$)
Deux éléments sont premiers entre eux s'ils admettent 1 pour pgcd.
$(a \wedge b)(a \vee b)$ associé à ab Démonstration : caractérisation de la divisibilité par inclusions d'idéaux.

Algorithme d'Euclide : si $a = bq + r$ alors $a \wedge b = b \wedge r$ et $b \wedge 0 = b$. Dans un anneau muni d'une division euclidienne ($\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{K}[X]$) on a alors l'algorithme d'Euclide pour déterminer le pgcd.

Théorème de Gauss : si $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$ alors $a \mid c$. On en déduit les corollaires suivants (et les généralisations aux produits de n termes) :

— $a \mid x,\ b \mid x$ et $a \wedge b = 1 \Rightarrow ab \mid x$

— si p irréductible et $p \mid ab$ alors $p \mid a$ ou $p \mid b$ (non-divisibilité $\Rightarrow$ premier entre eux pour un irréductible)

— $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1 \Rightarrow a \wedge bc = 1$

Décomposition en facteur irréductible : tout élément a non-nul et non-inversible d'un anneau principal se décompose comme produit de facteurs irréductibles. Pour un système $\mathcal{P}$ de représentants des irréductibles associés (positif pour $\mathbb{Z}$ et unitaire pour $\mathbb{K}[X]$), a s'écrit de manière unique comme $a = u \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p}$ avec u inversible et $\alpha_p \in \mathbb{N}$

Pour $a = up_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ et $b = vp_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}$ on a l'équivalence $a \mid b \Leftrightarrow \forall i,\ \alpha_i \leqslant \beta_i$.
Donc $a \wedge b = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \dots p_n^{\min(\alpha_n, \beta_n)}$ et $a \vee b = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \dots p_n^{\max(\alpha_n, \beta_n)}$

20.4 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Éléments inversibles : la classe de k est inversible si et seulement si k est premier avec n (Bézout). On en déduit les équivalences

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ est un corps } \Leftrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ est intègre } \Leftrightarrow n \text{ est premier}$$

Théorème chinois : si m et n sont premiers entre eux alors $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ par l'isomorphisme $k \mapsto ([k]_n, [k]_m)$.
Soit (m, n) premier entre eux et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, il existe k_0 une solution du système $\begin{cases} k \equiv a\ [n] \\ k \equiv b\ [m] \end{cases}$ et l'ensemble solution et l'ensemble de $k \equiv k_0\ [mn]$

Indicatrice d'Euler : $\varphi : \begin{cases} \mathbb{N}^* & \to \mathbb{N} \\ n & \mapsto \# \{p \in [\![1,\ n-1]\!] \ / \ p \wedge n = 1\} \end{cases}$ Elle vérifie pour tout $p \in \mathcal{P}$, $\varphi(p) = p - 1$ donc $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ Par ailleurs, pour $m \wedge n = 1$ on a $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ d'après le théorème chinois.

$$\varphi(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = \prod (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}) = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \prod \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Enfin $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ par dénombrement de $E_n = \left\{\frac{x}{n}, \dots x \in [\![0,\ n-1]\!]\right\}$ en revenant aux quotients de nombre premier entre eux $F_d = \left\{\frac{k}{d},\ k \in [\![0,\ d-1]\!], k \wedge d = 1\right\}$.

20.5 Groupes

Automorphisme intérieur : c'est un automorphisme de la forme $x \mapsto gxg^{-1}$ où $g \in G$.
Deux éléments sont dits conjugué si l'un est l'image par un automorphisme intérieur de l'autre.
En notant $\varphi_g : x \mapsto gxg^{-1}$, l'application $g \mapsto \varphi_g$ est un morphisme de g dans $\mathrm{Gl}(G)$
Un automorphisme intérieur conserve les propriétés algébriques (liées à la loi du groupe) et géométriques (liées aux actions de groupe).

Générateurs de groupes : une intersection de sous-groupes est un sous-groupe. On peut donc définir le plus petit sous-groupe engendré par une partie A noté $\langle A \rangle$.
A est une partie génératrice si $\langle A \rangle = G$.
$\langle A \rangle$ est l'ensemble des produits finis d'éléments de A et de leurs inverses.

Sous-groupe engendré par un élément : $\langle a \rangle = \{a^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.
Soit $n \mapsto a^n$ est injective, auquel cas $\langle a \rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, sinon son noyau est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ donc $n\mathbb{Z}$ et alors $\langle a \rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les nombres premiers avec n, il y en a $\varphi(n)$.

Un groupe engendré par un seul élément est dit monogène. Il est cyclique s'il est de plus fini.

Ordre d'un élément : c'est le cardinal de $\langle a \rangle$, c'est-à-dire le plus petit entier (pour l'ordre naturel et la divisibilité) p non-nul tel que $a^p = e$.

Théorème de Lagrange (HP) : soit H un sous-groupe, on définit la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$. Ses classes d'équivalences sont les $xH = \{xh, h \in H\}$ tous en bijection avec H. On en déduit que $\#H$ diviser $\#G$

21 Équations différentielles linéaires

21.1 Introduction

Notion d'équation différentielle : équation dont l'inconnue est une fonction, faisant intervenir cette fonction et ses dérivés au même point (pas de $y'() = y(t+1)$). Les fonctions sont d'une seule variable (pas de dérivées partielles).
Une équation différentielle est de la forme $F(t, y(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$ ou F est défini sur $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{n+1}$. Une solution est un couple (I, f) où I est un intervalle de définition et $f : I \to \mathbb{K}$ est n fois dérivable.

Équation linéaire : $F = a_0(t)y + \ldots + a_n y^{(n)} - b(t) = 0$
Les (a_i) sont les coefficients et b est le second membre. L'équation sans seconde membre est l'équation homogène associée.
L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation homogène est un sous-espace vectoriel. Il est affine dirigé par celui des solutions homogènes ou vide s'il y a un second membre.

Principe de superposition : si $b(t) = \sum \lambda_i b_i(t)$ et y_i une solution de l'équation linéaire de second membre b_i, alors $\sum \lambda_i y_i$ est solution de l'équation de second membre b

Équation résolue d'ordre n : de la forme $y^{(n)} = \Psi(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$.
Au premier ordre, elle s'écrit $y' = \Psi(t, y(t))$. Une condition initiale est un couple (t_0, y_0) et un problème de Cauchy est une équation du premier ordre muni d'une condition initiale.
A l'ordre k, une condition initiale est une liste $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1})$

Équation linéaire scalaire : $y' = a(t)y + b(t)$ avec a et b continue sur I. Une solution est a priori définie sur $J \subset I$, mais est en pratique prolongeable sur I. Si a et b sont de classe $\mathscr{C}^k$, alors on montre par récurrence que toute solution est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$. Cette définition se généralise à l'ordre n, pour $y : I \to E$ où E est un espace vectoriel. L'équation d'ordre 1 associée à $y^{(n)} = \Psi(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ en définissant Φ par :

$$\Phi\left(t, \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ \Psi(t, z_0, \dots, z_{n-1}) \end{pmatrix}$$

l'équation se réécrit alors $Z' = \Phi(t, Z)$

Forme intégrale : soit $D \subset \mathbb{R} \times E$ et $\Phi : D \to E$ continue. On considère l'équation $y' = \Phi(t, y)$ avec condition initiale $(t_0, y_0) \in D$. Si (I, f) est une solution, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, y)\mathrm{d}t$$

équation qui est équivalente à l'équation initiale.

21.2 Cas d'une résolution explicite

Équation linéaire scalaire d'ordre 1 : notons $(E) : a(t)y' + b(t)y = c(t)$ avec (a, b, c) continues sur I et que a ne s'annule pas. Notons (E_0) l'équation homogène associée.

— l'ensemble solution de E_0 sur I est une droite vectorielle sur $\mathbb{K}$. Il existe une fonction ne s'annulant pas sur I telle que $E_0 = \mathrm{Vect}(y_h)$

— il existe une solution y_p de (E) sur I. Les solutions de E sont alors $y_p + \mathrm{Vect}(y_h)$

— tout problème de Cauchy associé admet une unique solution définie sur I

Si a s'annule, on commence par résoudre sur les domaines où a ne s'annule pas, puis on raisonne par CN/CS.

Équation linéaire à coefficients constants : de la forme $y' = ay + b(t)$ ou a est constante sur I. Pour $a \in \mathscr{L}(E)$ et $b \in \mathscr{C}^0(I, E)$ On considère les trois équations et leurs équivalents matriciels :

$$\begin{array}{lll} (E) & y' = ay + b(t) & X' = AX + B(t) \text{ avec } X : I \to \mathbb{K}^n \\ (E_0) & y' = ay & X' = AX \text{ avec } X : I \to \mathbb{K}^n \\ (\mathcal{E}_0) & u' = a \circ u & U' = AU \text{ avec } U : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \end{array}$$

La fonction $u_0 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathscr{L}(E) \\ t & \mapsto & \exp(ta) \end{array}$ est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} u' = a \circ u \\ u(0) = \mathrm{id}_E \end{cases}$

Pour tout t, $u_0(t)$ est inversible. Les solutions de (E_0) sont les $u_0 \times y_0$ pour $y_0 \in E$. Plus généralement, $y(t) = \exp((t - t_0)a)y_0$ est l'unique solution sur I contenant t_0 du problème de Cauchy $\{\ y' = ayy(t_0) = y_0$ L'espace vectoriel des solutions de (E_0) est donc isomorphe à E (par $y \mapsto y(t_0)$)

Résolution pratique : calculer $\exp(tA)$ nécessite de réduire A. En pratique, cette réduction peut suffire :

- A diagonalisable, pour V un vecteur propre de valeur associé λ, $\varphi_V : t \mapsto e^{\lambda t}V$ est solution de $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = V \end{cases}$
  Il existe une base de vecteurs propres, donc une base de φ_V (même dimension) qui donne toutes les solutions...
- A diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et non $\mathbb{R}$. On trouve une base de vecteurs propres dans $\mathbb{C}$ vérifiant
  - si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $V \in \mathbb{R}^n$
  - si $\lambda \notin \mathbb{R}$ alors on forme des couples $V, \overline{V}$ (pour λ et $\overline{\lambda}$

  on change les couples de fonctions $(e^{\lambda t}V,\, e^{\overline{\lambda} t}\overline{V}) = (\varphi, \overline{\varphi})$ en $(\mathrm{Re}(\varphi), \mathrm{Im}(\varphi))$
- A trigonalisable : $A = PTP^{-1}$, on pose $Y = P^{-1}X$ on a $Y' = TY$, système triangulaire que l'on résout ligne par ligne, puis on revient à X grâce à $X = PY$

Équation totale : $y' = a.y + b(t)$ où $b \in \mathscr{C}^0(I, E)$, alors :

- il existe une solution y_1 de E sur I (variation de la constante)
- la solution de E sont $y_1 + \exp(ta).\Lambda$ avec $\Lambda \in E$ (SEA de dim 1...)
- tout problème de Cauchy associé à E sur I possède un unique solution sur I

On en déduit que deux solutions distinctes sont distinctes en tout point (ordonnée dans le cas réel)

Équation linéaire scalaire à coefficient constant : $y^{(n)} = a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y + b(t)$ où $(a_j)_{j \in [\![1,\, n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ et $b \in \mathscr{C}^0(I, E)$.
En se ramenant à une équation vectorielle d'ordre 1, on sait que les solutions de E sont un SEA de dimension n orienté par le SEV des solutions de l'équation homogène.

- toute solution de (E_0) est $\mathscr{C}^\infty$
- si D est la dérivation et $P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} X^i$ alors les solutions sont les éléments du noyau de $P(D)$
- si λ est racine de P d'ordre r alors $\forall Q \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$, $t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$ est solution de (E_0)

Résolution : si $P = \prod (X - \lambda_i)_i^r$, les solutions de (E_0) sont de la forme

$$y = \sum Q_i(t) e^{\lambda_i t}$$

avec $Q_i \in \mathbb{K}_{r_i - 1}[X]$
Dans le cas réel $P = \prod (X - \lambda_i)_i^r \prod ((X - \alpha_i)^2 + \beta_i^2)^{s_i}$, alors

$$y = \sum Q_i(t) e^{\lambda_i t} + \sum \exp(\alpha_i t)\big(R_i(t)\cos(\beta_i t) + S_i(t)\sin(\beta_i t)\big)$$

obtenue à partir de la solution complexe

Solution particulière : si $b(t) = Q(t)e^{\alpha t}$ on trouve une solution de la forme $t^r e^{\alpha t} R(t)$ avec $\deg R = \deg Q$ et r est l'ordre de multiplicité de α comme racine de P.

21.3 Cas général

Pas de méthode générale de résolution pour résoudre une équation différentielle linéaire qui n'est ni à coefficients constants (vectoriel ou scalaire) d'ordre 1

Théorème de Cauchy-linéaire : soit I un intervalle, $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(E)), b \in \mathscr{C}^0(I, E)$. Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in E$. On s'intéresse au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = a(t)[y] + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow y = y_0 + \int_{t_0}^{t} \big[a(u)[y(u)] + b(u)\big] \mathrm{d}u$$

ON démontre que si $(z_n) \in \mathscr{C}^0(I, E)^{\mathbb{N}}$ vérifie $z_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t a(u)[z_n(u)]\mathrm{d}u$ alors $\sum z_n$ converge normalement sur tout segment, puis que si $h(t) = \int_{t_0}^t a(u)[h(u)]\mathrm{d}u$ alors $h = 0$ ($\sum h$ converge).

Théorème de Cauchy-linéaire : Le problème de Cauchy $$y' = a(t)[y] + b(t) \quad \text{avec} \quad y(t_0) = y_0$$ admet une unique solution sur E

Existence cvu de $y_{n+1} = y_0 + \int_{t_0}^t a(u)[y_n(u)] + b(u)\mathrm{d}u$. Unicité, nullité de h ci-dessus. On en déduit que toute solution sur $J \subset I$ d'un problème de Cauchy se prolonge de manière unique sur I.

Structure de l'ensemble des solutions pour une équation d'ordre 1 : l'ensemble $\mathcal{E}_0$ des solutions de l'équation homogène sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et pour $t_0 \in I, y \mapsto y(t_0)$ est un isomorphisme de ε_0 dans E.
L'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de l'équation totale est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(I, E)$ dirigé par $\mathcal{E}_0$. Donc $E, \mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}$ ont même dimension.

Système fondamental : c'est une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Pour en trouver il suffit de trouver $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ telles que
- soit φ_i soit solution et la $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre
- soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est génératrice de $\mathcal{E}_0$

Et de conclure par un argument de dimension.

Wronskien : pour $(y_1, \dots, y_n)$ des solutions de $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{B}$ une base de E on appelle matrice wronskienne de $(y_1, \dots, y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ la fonction $W : t \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y_1(t), \dots, y_n(t))$. On appelle wronskien la fonction $w : t \mapsto \det(W(t))$. On a alors les équivalences
- $(y_1, \dots, y_n)$ est un système fondamental
- $\exists t \in I, w(t) \neq 0$
- $\forall t \in I, w(t) \neq 0$

Recherche d'une solution particulière : méthode de la variation des constantes à partir de la forme d'une équation homogène (combinaison linéaire d'un système fondamental).

Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n = 2$: de la forme $a_n(t)y^{(n)} + \dots + a_0(t)y = b(t)$ avec les (a_i) et b continues sur I et (a_n) ne s'annulant pas sur I. L'ensemble des solutions est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$
Pour l'ordre 2, $\forall t_0 \in I, \forall (a,b) \in \mathbb{K}^2, \exists! y \in S, y(t_0) = a$ et $y'(t_0) = b$
Pour (y_1, y_2) deux solutions de l'équation homogène d'ordre 2, on appelle wronskien de (y_1, y_2) la fonction

$$t \mapsto \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

Sa non-nullité caractérise l'indépendance de (y_1, y_2). Il vérifie l'équation $aw' + bw = 0$ (pour $ay'' + by' + cy = 0$). On en déduit que le wronskien de deux solutions d'une équation du type $y'' + qy = 0$ est constant sur I.

21.4 Étude qualitative des solutions d'une équation différentielle

Lemme de Gronwall (HP) : soit $a, b \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}_+)$ et A la primitive de a s'annulant en $t_0 \in I$. Soit y de classe $\mathscr{C}^1$ sur I vérifiant

$$\|y'\| \leqslant b(t) + a(t)\|y\|$$

alors $\|y\| \leqslant \|y(t_0)\| e^{A(t)} + e^{A(t)} \displaystyle\int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}\mathrm{d}s$.
Démo : poser $F(t) = \int_{t_0}^t b(s) + a(s)\|y(s)\|\mathrm{d}s$ et établir $F' - aF \leqslant b + a(t)\|y(t_0)\|$ puis intégrer en multipliant par $e^{-A(t)}$

22 Calcul différentiel

22.1 Différentiabilité

Rappels : fonction de plusieurs variables et fonctions partielles (dans une base de l'espace de départ) (continuité $\Rightarrow$ continuité partielle, mais PAS la réciproque). Ne pas confondre avec fonction composante (dans une base de l'espace d'arrivée) où la continuité et dérivabilité est équivalente à celle de toutes les fonctions composantes

Dérivée selon un vecteur : soit $U \subset E$ un ouvert et $f : U \to F$. Soit $a \in U$ et $h \in E$ on dit que f est dérivable selon le vecteur h en a si $t \mapsto f(a+th)$ est dérivable en 0. Sa dérivée est notée $D_h f(a)$

Dérivée partielle : lorsque $E = \mathbb{R}^p$, les dérivées selon les vecteurs de la base canoniques s'appellent les dérivées partielles et se note $D_j f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

Applications tangentes et comparaisons : pour $u \in \mathscr{L}(E, F)$ avec E de dimension finie.

— u continue sur E et $u(h) = O(h)$ au voisinage de 0

— $u = 0 \Leftrightarrow u(h) = \mathrm{o}(h)$

f et g dites tangentes en $a \in U$ si $f(a+h) - g(a+h) = \mathrm{o}(h)$. Cette notion est un cas particulier du contact d'ordre k, donné par $o(\|h\|^k)$

Différentielle en un point : on dit que f est différentiable en $a \in U$ s'il existe une application affine tangente à f en a, c'est-à-dire :

$$\exists u \in \mathscr{L}(E, F),\ \forall h \in E\ \ f(a+h) = f(a) + u(h) + \underset{h \to a}{\mathrm{o}}(h)$$

Propriété de la différentielle :

— Contrairement aux dérivées partielles, la différentiabilité implique la continuité.

— L'application u est alors unique, on la note $\mathrm{d}f(a)$ et on l'appelle différentielle de f en a.

— si f est différentiable en $a \in U$ alors elle admet une dérivée selon tout vecteur $h \in E$ et $D_h f(a) = \mathrm{d}f(a)[h]$

— on en déduit que pour $h = (h_1, \dots, h_n)$ dans une base de E fixée, on a

$$\mathrm{d}f(a)[h] = D_h f(a) = \sum_{j=1}^{n} h_j \partial_j f(a) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Opérations sur les fonctions différentiables : f est différentiable sur U si elle l'est en tout point de u. Sa différentielle est alors la fonction $\mathrm{d}f : \left\{ \begin{array}{rcl} U & \to & \mathscr{L}(E, F) \\ x & \mapsto & \mathrm{d}f(x) \end{array} \right.$.

Soit $f, g : U \to F$ différentiables en a,

— alors $\lambda f + \mu g$ l'est également et $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a)$

— soit $T \in \mathscr{L}(E\, F)$, $T \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(T \circ f)(a) = T(\mathrm{d}f(a))$

— pour S bilinéaire, $S(f, g)$ est différentiable en a et

$$\forall h \in E\, \mathrm{d}(S(f, g))(a).h = S(\mathrm{d}f(a).h, g(a)) + S(f(a), \mathrm{d}g(a).h)$$

— composition : si $f : U \to V$ est différentiable en $a \in U$ et $g : V \to F$ différentiable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a) = h \mapsto \mathrm{d}g(f(a))[\mathrm{d}f(a)[h]]$$

— inverse : si f réelle ne s'annule pas, alors $\frac{1}{f}$ différentiable en a et $\mathrm{d}(\frac{1}{f})(a) = -\frac{\mathrm{d}f(a)}{f^2(a)}$

Ces opérations se généralisent aux fonctions différentiables sur U

Fonction composante : f est différentiable si et seulement si ses fonctions composantes dans une base de F le sont. Dans ce cas les composantes de la différentielle sont les différentielles des composantes

Dérivés d'une fonction d'une variable : soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. $\varphi : I \to F$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si elle y est différentiable.
Sa différentielle en t_0 est alors $t \mapsto t\varphi'(t_0)$
Si $\varphi : I \to U$ est dérivable en t_0 et $f : U \to F$ est différentiable en $a = \varphi(t_0)$ alors $f \circ \varphi$ est différentiable/dérivable en t_0 et $\mathrm{d}(f \circ \varphi)(t_0) = \mathrm{d}f(a) \circ \mathrm{d}\varphi(t_0)$
Cas particulier : $\varphi = a + th$, on retrouve la dérivée selon le vecteur h

Dérivés d'une fonction à plusieurs variables : si $E = \mathbb{R}^p$ et $f : U \to F$ est différentiable sur U alors pour toute application $x_1, \dots, x_p : I \to \mathbb{R}^p$ dérivable, $f(x_1, \dots, x_p)$ dérivable et

$$\forall t \in I, \frac{\mathrm{d}f(x_1, \dots, x_p)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i}(x_1(t), \dots, x_p(t))$$

Règle de la chaine : soit U ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to V$ et $g : V \to G$ deux applications différentiables. Alors $g \circ f$ est différentiable sur U et ses dérivées partielles vérifient :

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial g}{\partial f_i}(f(x))$$

Matrice jacobienne : on prend E de dim p muni d'une base $\mathcal{B}_E$ et F de dim n muni de $\mathcal{B}_F$. Soit $f : U \to F$ différentiable en a, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\mathrm{d}f(a)) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

C'est la matrice jacobienne, notée $\left(\dfrac{\partial f_1, \dots, f_p}{\partial x_1, \dots, x_n}\right)$. Sa j-ème colonne est les coordonnées de $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ dans la base de F, sa i-ième ligne est la matrice de $\mathrm{d}f_i(a)$ dans la base

de $\mathbb{R}^p$.
Ces matrices sont compatibles avec la règle de la chaine :

$$\left(\frac{\partial (g\circ f)_1,\dots,(g\circ f)_p}{\partial x_1,\dots,x_n}\right)(a)=\left(\frac{\partial g_1,\dots,g_p}{\partial y_1,\dots,y_q}\right)(f(a))\left(\frac{\partial f_1,\dots,f_q}{\partial x_1,\dots,x_n}\right)(a)$$

Difféomorphismes (HP) : un difféomorphisme est une bijection différentiable dont la réciproque est différentiable. Les différentielles sont alors réciproques l'une de l'autre (et donc $\dim E=\dim F$). Si $E=F=\mathbb{R}^n$ les jacobiennes sont alors en tout point inverses l'une de l'autre
C'est un changement de variable (par exemple : $\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2\backslash]-\infty,0]\times\{0\} & \to & \mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[\\ (x,y) & \mapsto & (r,\theta)\end{array}\right)$

Théorème d'inversion locale (HP) : si $f\in\mathscr{C}^1(U,F)$ admet une différentielle bijective en $a\in U$, alors elle induit un difféomorphisme d'un voisinage de a dans un voisinage de $f(a)$

Théorème d'inversion globale (HP) : si $f\in\mathscr{C}^1(U,F)$ est injective et a une matrice jacobienne inversible en tout point de U, alors $V=f(U)$ est un ouvert de F et f un difféomorphisme de U dans V.

22.2 Fonctions numériques

Gradient : d'après le Lemme de Riez, pour $f:U\to\mathbb{R}$ différentiable en $a\in U$ où U est un ouvert d'un espace euclidien, il existe un unique vecteur $\nabla f(a)$ tel que

$$\forall x\in E,\ \langle \nabla f(a),\, x\rangle = \mathrm{d}f(a).x$$

Si le gradient de f en a est non-nul, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée est maximale.
Dans une base orthonormée, le gradient s'exprime en fonction des dérivées partielles : $\nabla f(a)=\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot e_i$

Extremum local : soit $a\in U$ on dit que c'est un

— minimum local s'il existe $\eta>0$ tel que $\forall x\in\mathcal{B}(a,\eta),\ f(x)\leqslant f(a)$
— maximum local s'il existe $\eta>0$ tel que $\forall x\in\mathcal{B}(a,\eta),\ f(x)\geqslant f(a)$
— extremum local si c'est un maximum où un minimum

Un point critique de f est un point $a\in\mathring{A}$ tel que f soit différentiable de différentielle nulle en a.
Tout point intérieur a où f admet un minimum local et est différentiable est un point critique

22.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Classe $\mathscr{C}^1$: une fonction est continûment différentiable sur U, ou $\mathscr{C}^1$ si elle est différentiable sur U et que sa différentielle est continue sur U.
Les fonctions linéaires et affines sont $\mathscr{C}^1$. On déduit des opérations sur les fonctions différentiables que toute combinaison linéaire, produit, composée, et inverse de fonctions $\mathscr{C}^1$ est $\mathscr{C}^1$.
Une fonction est $\mathscr{C}^1$ si et seulement si toutes ses composantes sont $\mathscr{C}^1$

Théorème fondamental : si E est de dimension finie p et que dans une base de E, toutes les dérivées partielles de f sont continues sur U, alors f est $\mathscr{C}^1$ sur U

Lien avec l'intégration : pour $\varphi : I \to U$ dérivable et $f : U \to F$ de classe $\mathscr{C}^1$, on a

$$f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = \int_a^b (f \circ \varphi)'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{d}f(\varphi(t))\big[\varphi'(t)\big]\mathrm{d}t$$

Donc sur un ouvert U connexe par arc, $f : U \to E$ est constante si et seulement si, sa différentielle est nulle.

Dérivées partielles successives : soit $(i_1, \dots, i_k) \in [\![1, p]\!]^k$, lorsqu'elle existe, la fonction $\partial_{i_1}\big(\partial_{i_2}(\dots\partial_{i_k})\big)$ est appelée dérivé partielle de f selon $(i_1, \dots, i_k)$.
On appelle dérivées partielles d'ordre k les dérivés par rapport à toutes les listes d'indices de longueur k.

Classe $\mathscr{C}^k$: une fonction $f : U \to F$ est de classe $\mathscr{C}^k$ si toutes se dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U.
- si f est de classe $\mathscr{C}^k$, alors elle est $\mathscr{C}^i$ pour tout $i \leqslant k$
- f est de classe $\mathscr{C}^k \Leftrightarrow$ elle admet de dérivées partielles d'ordre 1 toute de classe $\mathscr{C}^{k-1}$

Une fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

Opération sur les fonctions $\mathscr{C}^k$: $\mathscr{C}^k(U, F)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel sur lequel la différentielle est une fonction linéaire. La composition de fonctions $\mathscr{C}^k$ par une application linéaire, bilinéaire ou $\mathscr{C}^k$ reste $\mathscr{C}^k$.
Une fonction est donc $\mathscr{C}^k$ si et seulement si toutes ses composantes le sont.
Pour montrer qu'une fonction f est $\mathscr{C}^k$, on peut exhiber S un ensemble de fonctions continues stable par dérivée partielle contenant f.

Dérivées successives selon des vecteurs : on la définit de même que pour les dérivées partielles.
Une fonction est de classe $\mathscr{C}^k$ si et seulement si elle admet une dérivée k-ième selon

toute famille de vecteurs et si ces dérivées sont continues.
On peut donc étendre la définition de $\mathbb{R}^n$ au cas où E est ev de dimension finie (indépendant de la base)

Théorème de Schwarz : soit $f : U \to F$ de classe $\mathscr{C}^2$, on a

$$\forall (h,k) \in E^2,\ D_h D_k f = D_k D_h f$$

Champs de vecteurs dérivant d'un potentiel : soit E euclidien de dimension p, et $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs $U \to E$. On dit que $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel s'il existe $f : U \to \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \nabla f$. SI $\overrightarrow{V}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,\ p]\!]^2,\ \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

22.4 Applications

Arc paramétré : un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^k$ est un couple (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide et $f : I \to E$ est de classe $\mathscr{C}^k$. $f(I)$ est le support de (I, f), ou sa courbe dans E.

Tangente à un arc : si $f \neq f(t_0)$ au voisinage de $t_0^{\neq}$ on dit qu'elle admet une tangente lorsque la droite $M(t)M(t_0)$ admet une limite (i.e. son vecteur directeur admet une limite). Pour un arc plan $f = (x(t), y(t))$, si $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ alors elle admet une tangente au point m.

Point régulier : pour un arc $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 1$, un point $M(t_0)$ est régulier si $f'(t_0) \neq 0$. L'arc admet alors en $M(t_0)$ une tangente orientée par $f'(t_0)$

Vecteurs tangents : un vecteur v_0 est tangent à une partie X en a s'il existe $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to X$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v_0$

Description de courbe et de plan :

- paramétré : $\Gamma = \Big\{ \big(x(t), y(t)\big),\ t \in I \Big\} = f(I)$
  $S = \Big\{ \big(x(t,u), y(t,u), z(t,u)\big),\ (t,u) \in A \Big\}$
- implicite : $\Gamma = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y) = 0 \Big\} = f^{-1}(\{0\})$
  $S = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^2, f(x,y,z) = 0 \Big\}$
- graphe : $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in I\}$ et $S = \{(x, y, f(x,y)), (x,y) \in A\}$

Pour un plan défini par un graphe avec f de classe $\mathscr{C}^1$, l'ensemble des vecteurs tangents à $z = f(x, y)$ en a est $\overrightarrow{P} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}\right)$

Théorème de fonctions implicites (HP) : $F \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $a \in U$ tel que $F(a) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial x}(a) \neq 0$. Alors on a un paramétrage au voisinage de $a = (x_0, y_0, z_0)$:

$$F(x, y, z) = \Leftrightarrow z = f(x, y)$$

où f est $\mathscr{C}^1$ d'un voisinage de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}$

Lien avec le gradient : Soit $F \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $a \in U$ tel que $F(a) = 0$ et $\nabla F(a) \neq 0$, l'ensemble des vecteurs tangents à $F^{-1}(0)$ en a est le plan orthogonal à $\nabla F(a)$

Résumé : $T = \{$vecteurs tangents à S en $a\}$. On a alors selon la définition de S

— graphe : $\mathscr{C}^1$, alors $T = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}\right)$

— implicite : $T \subset \{\langle \nabla F(a), x\rangle = 0\}$

— paramétré : $\text{Vect}(\frac{\partial M}{\partial u}(a), \frac{\partial M}{\partial v}(a)) \subset T$