Percolation dans des graphes plan

Démonstration de la valeur de la probabilité critique dans le réseau carré

Dorian Lesbre

TIPE session 2018 - mathématique

Juin 2018

1. Notion de percolation
   - Définition
   - Modélisation : percolation de Bernoulli par liens
2. Résultats généraux en percolation
   - Préliminaires probabilistes
   - Probabilité critique et transition de phase
3. Percolation dans le réseau carré
   - Dualité planaire
   - Régimes sur-critique et sous-critique
   - Valeur de la probabilité critique en dimension 2
4. Étude de chemins sous contraintes
   - Restriction à $\mathbb{N}^2$
   - Chemins strictement croissants

Le phénomène de percolation

Définition

C'est un effet de seuil dans la transmission d'une information au travers un milieu régulier aléatoire : une faible variation des paramètres différencie la transmission limitée a quelques voisins proches ou à des voisins arbitrairement loin.

Exemples :

- solides poreux
- gélification d'un liquide par formation de liaisons intermoléculaires
- propagation des feux de forêt

Percolation de Bernoulli : modélisation

Modèle

- un graphe simple non-orienté dénombrable connexe $G = (S, E)$, par exemple $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ où $\mathbb{E}^d = \{(x, y) \in (\mathbb{Z}^d)^2 \,/\, \|x - y\|_1 = 1\}$
- un paramètre $p \in [0, 1]$
- une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_e)_{e \in E}$ suivant la loi de Bernoulli de paramètre p dans un espace probabilisé $(\Omega_p, \mathcal{A}_p, \mathbb{P}_p)$.

On définit alors le graphe $G(\omega) = (S, E_\omega)$ où $E_\omega = \{e \in E \,/\, X_e(\omega) = 1\}$.

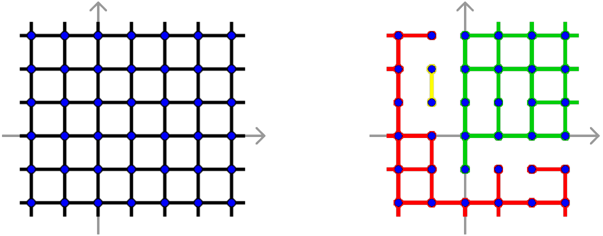

Figure – Exemple de percolation dans le graphe $\mathbb{L}^2$ pour $p = 0.6$

Percolation de Bernoulli : définitions

Notations :

- on appelle arêtes et chemins ouverts les arêtes et chemins de $G(\omega)$.
- on note $x \leftrightarrow y$ l'événement "x et y sont reliés par un chemin ouvert".
- on note $C(x)$ la composante connexe ouverte de x.
- on note $x \leftrightarrow \infty$ l'événement "$\mathrm{Card}(C(x)) = +\infty$".

Définitions : on pose les deux fonctions suivantes :

- la probabilité qu'il y ait percolation,

$$\psi : \begin{cases} [0,1] & \rightarrow & [0,1] \\ p & \mapsto & \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{x \in S} \{x \leftrightarrow \infty\}\right) \end{cases}$$

- la probabilité qu'il y ait percolation en x,

$$\theta_x : \begin{cases} [0,1] & \rightarrow & [0,1] \\ p & \mapsto & \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow \infty\}) \end{cases}$$

Préliminaires probabilistes : loi du 0-1 de Kolmogorov

Tribu asymptotique : c'est l'ensemble des événements A indépendants de l'état de tout nombre fini n d'arêtes $\{e_1, \ldots, e_n\}$

$$\forall \varepsilon \in \{0,1\}^n, \mathbb{P}_p\left(A \cap \bigcap_{i=1}^{n} \{X_{e_i} = \varepsilon_i\}\right) = \mathbb{P}_p(A) \times \mathbb{P}_p\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_{e_i} = \varepsilon_i\}\right)$$

Théorème

Soit A un événement de la tribu asymptotique, alors

$$\mathbb{P}_p(A) = 1 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}_p(A) = 0$$

Préliminaires probabilistes : inégalité FKG

Événement croissant : on muni Ω_p de la relation d'ordre :

$$\omega \preccurlyeq \omega' \;\Leftrightarrow\; \forall e \in E,\, X_e(\omega) \leqslant X_e(\omega')$$

Un événement A est dit croissant si $\forall \omega \in A, \forall \omega' \in \Omega,\ \omega \preccurlyeq \omega' \Rightarrow \omega' \in A$.

Théorème

Pour A, B deux événements croissants : $\mathbb{P}_p(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B)$

Existence d'une probabilité critique

Définition

On définit la probabilité critique p_c par

$$p_c = \sup \{p \in [0,1] \,/\, \theta_x(p) = 0\} \text{ pour } x \in S$$

Cette valeur ne dépend que du graphe.

Démonstration : soit x et y deux points du graphe,

$$\begin{aligned}\theta_x(p) &= \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow \infty\}) \geqslant \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow y\} \cap \{y \leftrightarrow \infty\}) \\ &\text{or } \{x \leftrightarrow y\} \text{ et } \{y \leftrightarrow \infty\} \text{ sont croissants donc d'après FKG,} \\ &\geqslant \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow y\})\mathbb{P}_p(\{y \leftrightarrow \infty\}) \\ &= \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow y\})\theta_y(p)\end{aligned}$$

D'où l'implication $\theta_y(p) \neq 0 \Rightarrow \theta_x(p) \neq 0$.

Transition de phase

Théorème

La fonction ψ vérifie $\psi(p) = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } p < p_c \\ 1 \text{ si } p > p_c \end{array} \right.$

Démonstration : l'évènement $\bigcup_{x \in S} \{x \leftrightarrow \infty\}$ est indépendant de l'état d'un nombre fini d'arêtes donc ψ est à valeur dans $\{0, 1\}$ d'après la loi du 0-1.

- Pour $p > p_c$, $\psi(p) \geqslant \mathbb{P}(x \leftrightarrow \infty) = \theta_x(p) > 0$ par croissance de θ_x.
- Pour $p < p_c$, $\psi(p) \leqslant \sum_{x \in S} \mathbb{P}(x \leftrightarrow \infty) = 0$.

Percolation dans $\mathbb{L}^2$: simulation numérique

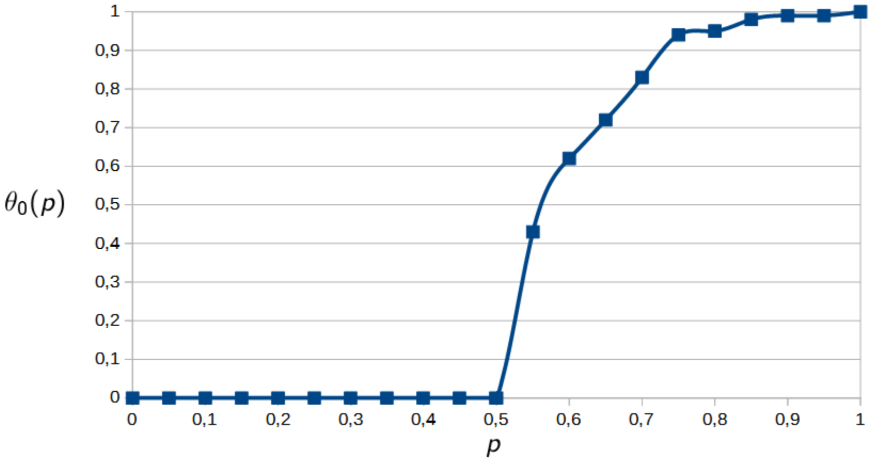

Figure – La fonction θ_0 dans $\mathbb{L}^2$

Inégalité fondamentale sur la probabilité critique

Proposition

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, on a l'inégalité suivante dans le graphe $\mathbb{L}^d$:

$$0 < p_c < 1$$

Démonstration : $p_c > 0$

- le degré du graphe est borné par $M = 2d$.
- donc le nombre de chemin de taille n partant de x est majoré par M^n.
- ainsi $\mathbb{P}_p(|C(x)| \geqslant n) \leqslant (Mp)^n$.
- ce qui donne pour $p < \frac{1}{M}$, $\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \infty) = 0$.

Pour $p_c < 1$ on remarque que $\mathbb{L}^d \subset \mathbb{L}^{d+1}$ donc $p_c(\mathbb{L}^d) \geqslant p_c(\mathbb{L}^{d+1})$, il suffit donc de montrer le résultat pour $d = 2$.

Graphe dual : définition

Pour $\mathbb{L}^2$, le graphe dual $\mathbb{L}^{2*}$ correspond au graphe translaté de $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

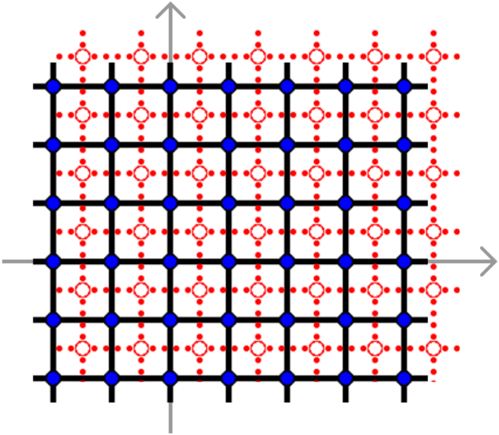

Figure – Les graphes $\mathbb{L}^2$ (en noir) et $\mathbb{L}^{2*}$ (en rouge)

Graphe dual : percolation

On déclare une arête du dual ouverte si elle croise une arête fermée du graphe principal, on la déclare fermée sinon.
On obtient ainsi une percolation de Bernoulli de paramètre $1 - p$ dans le dual.

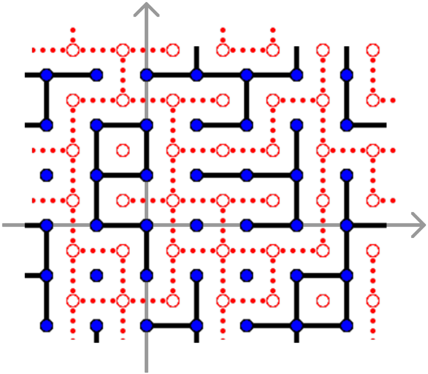

Figure – Percolation dans le graphe dual

Régimes sur-critique et sous-critique

Régime sous-critique

Théorème

Pour $p < p_c$ il existe $(c_1, c_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Z}^d,\ \mathbb{P}_p(|C(x)| \geqslant n) \leqslant c_1 e^{-c_2 n}$$

Régime sur-critique

Théorème

Pour $p > p_c$ la composante connexe infinie est presque surement unique, et ce dans tout graphe $\mathbb{L}^d$.

Valeur de la probabilité critique en dimension 2

Théorème (Harry Kesten 1982)

La probabilité critique de la percolation de Bernoulli dans $\mathbb{L}^2$ vaut $\frac{1}{2}$.

On effectue dans la suite la démonstration par double inégalité, en montrant que pour $p = \frac{1}{2}$ on n'est ni en régime sous-critique, ni en régime sur-critique.

$p_c \leqslant \frac{1}{2}$

Supposons $p_c > \frac{1}{2}$, notons pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- T_n la boite $(0,0)...(n, n-1)$ privée des arêtes supérieures et inférieures
- T_n^* la boite équivalente dans le dual après rotation d'angle droit.
- A_n : "il existe un chemin ouvert de T_n reliant haut et bas"
- A_n^* : "il existe un chemin ouvert de T_n^* reliant gauche et droit"

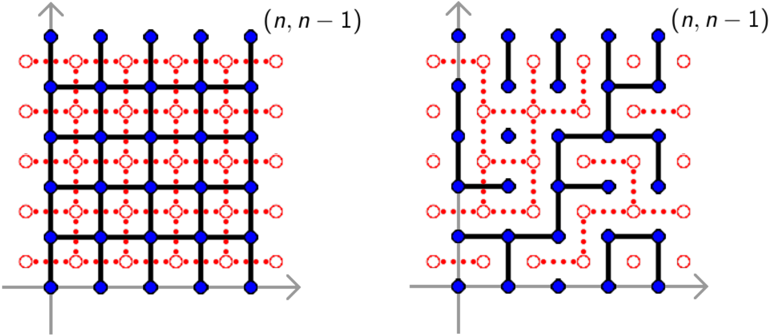

Figure – Les boites T_n et T_n^* (gauche), et l'événement A_n (droite)

$p_c \leqslant \frac{1}{2}$

A_n et A_n^* vérifient :

- $\{A_n, A_n^*\}$ est un système complet d'événements, d'où $\mathbb{P}_p(A_n) + \mathbb{P}_p(A_n^*) = 1$.
- $\mathbb{P}_p(A_n) = \mathbb{P}_{1-p}(A_n^*)$ par auto-dualité de $\mathbb{L}^2$

Ainsi pour $p = \dfrac{1}{2}$ on a $\underline{\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_n) = \dfrac{1}{2}}$

Or $A_n \subset \displaystyle\bigcup_{x=0}^{n-1} \{|C((x,0))| \geqslant n\}$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_n) &\leqslant \sum_{x=0}^{n-1} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(|C((x,0))| \geqslant n) \\
&\leqslant \sum_{x=0}^{n-1} c_1 e^{-c_2 n} \quad \text{en régime sous-critique.} \\
&= n c_1 e^{-c_2 n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$p_c \geqslant \frac{1}{2}$: lemme préliminaire

Lemme

Pour $(A_1, \ldots, A_m)$ m événements croissants de même probabilité,

$$\mathbb{P}(A_1) \geqslant 1 - \sqrt[m]{1 - \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)}$$

$p_c \geqslant \frac{1}{2}$

Supposons $\theta(p_c) > 0$, Notons $T(n)$ la boite $(-n,-n)...(n,n)$, posons

$$A_n(g) = \bigcup_{x=-n-1}^{n} \{(x,-n) \leftrightarrow \infty \text{ par un chemin ne repassant pas dans } T(n)\}$$

et définissons de même $A_n(d)$, $A_n(h)$ et $A_n(b)$.

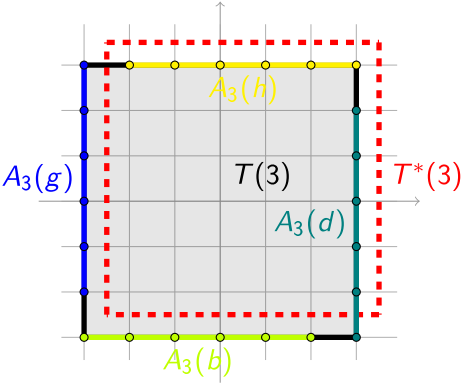

Figure – Les boites $T(3)$ et $T^*(3)$, avec les points de départs des $A_3(u)$

$p_c \geqslant \frac{1}{2}$

Notons $B_n = \bigcup_{u \in \{g,d,h,b\}} A_n(u) =$ " $T(n)$ intersecte un amas infini".

Par continuité monotone, $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B_n) = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = 1$.

D'après le lemme $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_n(g)) \geqslant 1 - \sqrt[4]{1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B_n)} \to 1 > \frac{7}{8}$.

Donc $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_n(g)) \geqslant \frac{7}{8}$ à partir d'un rang N.

Notons $A_n^*(u)$ les événements équivalents dans le dual.

Posons $C = A_N(g) \cap A_N(d) \cap A_N^*(h) \cap A_N^*(b)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\overline{C}) &= \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\overline{A_N(g)} \cup \overline{A_N(d)} \cup \overline{A_N^*(h)} \cup \overline{A_N^*(b)}) \\
&\leqslant \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\overline{A_N(g)}) + \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\overline{A_N(d)}) + \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\overline{A_N^*(h)}) + \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\overline{A_N^*(b)}) \\
&\leqslant \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi $\underline{\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(C) > 0}$

$p_c \geqslant \frac{1}{2}$

Or $\underline{\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(C) = 0}$ car si C est réalisé et $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(C) > 0$, alors par unicité presque sure de la composante connexe infinie :

- les côtés gauche et droit de $T(n)$ sont reliés.
- les côtés haut et bas de $T^*(n)$ sont reliés.

Ce qui est impossible : il ne peuvent être reliés par l'extérieur de $T(n)$ sans couper les chemins infinis du dual et ne peuvent être tous deux reliés par l'intérieur.

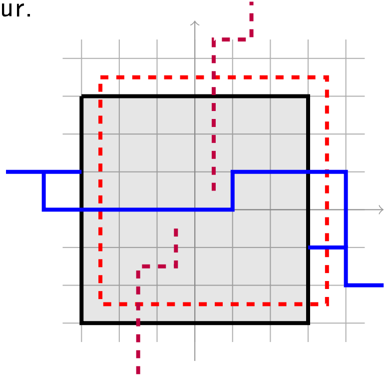

Figure – L'événement C réalisé

Restriction à $\mathbb{N}^2$

Notons $\mathbb{L}^{2+}$ le graphe induit sur $\mathbb{N}^2$.

Proposition

La probabilité critique dans $\mathbb{L}^{2+}$ vaut également $\dfrac{1}{2}$.

Démonstration : par double inégalité :

- $p_c \geqslant \frac{1}{2}$ car $\mathbb{L}^{2+} \subset \mathbb{L}^2$.
- $p_c \leqslant \frac{1}{2}$ car la démonstration s'adapte à $\mathbb{N}^2$, qui vérifie également la décroissance exponentielle en régime sous-critique.

Chemins strictement croissants

Définition : un chemin est strictement croissant si les arêtes $(x, y) \to (x', y')$ qui le composent vérifient $x' + y' > x + y$.

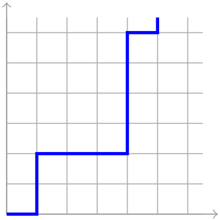

Figure – exemple de chemin strictement croissant

Proposition

La probabilité critique de percolation avec des chemins strictement croissants vérifie $p_c > \dfrac{1}{2}$.

Chemins strictement croissants : simulation numérique

Numériquement, on trouve $p_c \approx 0.63$.

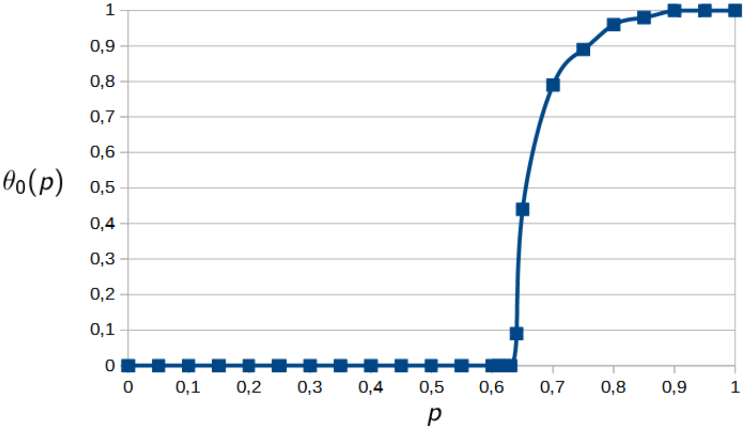

Figure – La fonction $\theta_0(p)$ pour des chemins strictement croissants