

Exercices de colle

SEMAINE 1

Jonathan Laurent

Exercices techniques

Énoncés

1. Calcul de $\cos \frac{\pi}{8}$ et de $\cos \frac{\pi}{12}$
2. Montrer que $\sum_{z \in U_n} |z - 1| = 2 \cot \frac{\pi}{2n}$
3. Calcul de $\prod_{z \in U_n} z$
4. Valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 t \, dt$

Éléments de réponse

1. $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{6}}}{4}$
 - $\cos^2 t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2t)$
 - $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$
2. Factorisation par l'angle moitié
3. $(-1)^{n-1}$
4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 t \, dt = 0$ par imparité de $t \mapsto \sin^3 t$. Sinon, on linéarise.

Problèmes

1. *Inégalité du parallélogramme* : $\forall a, b \in \mathbb{C}. |a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$
Poser le problème géométriquement et demander le cas d'égalité ($a = \pm b$)

2. *Calcul de $\sin \frac{\pi}{5}$.* Indication :

- (a) Montrer que $\sum_{i=0}^4 \omega^i = 0$, où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$
- (b) En déduire que $x = \cos \frac{2\pi}{5}$ est solution d'une équation de degré 2 :
($4x^2 + 2x - 1 = 0$)
- (c) Conclure

3. *Algèbricité de $\cos \frac{\pi}{n}$:*

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists T_n \in \mathbb{R}[X], \cos(nt) = T_n(\cos t)$.
Commencer par étudier les cas $n = 2$ et $n = 3$.
- (b) Conclure
- (c) *Bonus* : degré de T_n et coefficient dominant