Exercices de colle

Semaine 2

Jonathan Laurent

Nombres complexes

Problème pour trois élèves : autour de la méthode d'Archimède

Dans le problème suivant, on cherche des identités permettant d'approximer π. Les trois élèves résolvent indépendamment leur partie, et prennent 5 minutes à la fin de l'heure pour mettre leurs résultats en commun.

Élève 1

1. Calculer

$$\min_{\substack{\omega,\,\tau\,\in\,\mathbb{U}_n\\ \omega\neq\tau}} |\omega-\tau|$$

   Réponse : $2\,\sin\frac{\pi}{n}$

2. Interpréter géometriquement ce résultat. Conjecturer la valeur de

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$$

   Indication : $2n\,\sin\frac{\pi}{n}$ est le périmètre d'un n-gone régulier inscrit dans le cercle unité.
   Réponse : π.

Élève 2

Soit $(u_n)_{n\,\geq\,1}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n} \end{cases}$$

Montrer que $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^n}$ pour $n > 0$.

Élève 3

On pose

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k}$$

Montrer que

$$\forall x.\ \sin\frac{x}{2^n} \cdot P_n(x) = 2^{-n} \cdot \sin x$$

Synthèse

Déduire de (1) et (3) que

$$\frac{2}{P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)} \longrightarrow_{n\to\infty} \pi$$

et donc

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$$

Déduire de (1) et (2) que

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}}_{n \text{ racines}}$$

Équations différentielles

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$$

   Solution :

$$y_\lambda(x) = \frac{\lambda - x}{x^2+1}$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(1+e^x)y' + e^x y = 1 + e^x$$

Solution :

$$y_\lambda(x) = \frac{\lambda + x + e^x}{1 + e^x}$$

3. *Équation avec raccordement* : trouver toutes les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$y' + y = |x|$$

Réponse :

$$y_\lambda(x) = \begin{cases} x - 1 + (\lambda + 2)e^{-x} & x \geq 0 \\ -x + 1 + \lambda e^{-x} & x < 0 \end{cases}$$