Exercices de colle

Semaine 3

Jonathan Laurent

Équations différentielles

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$
$$y'' + y' - 2y = 10 \sin x$$

   Réponse :
$$f_{\lambda,\mu}(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-2x} - (\cos x + 3 \sin x)$$

2. Trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que
$$f' + f = \int_0^1 f(t)\, dt$$

3. *Équation avec raccordement* : trouver toutes les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que
$$y' + y = |x|$$

   Réponse :
$$y_\lambda(x) = \begin{cases} x - 1 + (\lambda + 2)e^{-x} & x \geq 0 \\ -x + 1 + \lambda e^{-x} & x < 0 \end{cases}$$

Théorie des ensembles

1. Si E est un ensemble, et $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit
$$\begin{array}{cccc} \chi_A & : & E & \to & \{0, 1\} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

(a) Exprimer en fonction de χ_A et χ_B : $\chi_{E\setminus A}$, $\chi_{A\cup B}$, $\chi_{A\cap B}$, $\chi_{A\setminus B}$, $\chi_{A\Delta B}$

(b) Démontrer à l'aide de fonctions caractéristiques l'identité

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

2. Si E est un ensemble, $A, B \subset E$, résoudre sur $\mathcal{P}(E)$ l'équation

$$A \cap X = B$$

3. Soient E, F et I des ensembles, $f : E \to F$. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E et $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de F, montrer que

   (a) Montrer que $f\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f(A_i)$

   (b) Comparer $f\left(\bigcap_i A_i\right)$ et $\bigcap_i f(A_i)$ (*Réponse :* $\subset$)

4. Conditions nécessaires et suffisantes sur $f : E \to F$ pour que :

   (a) $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$

   (b) $f^{-1}(f(A)) = A$

   Donner les inclusions varies dans le cas général.

   Réponses :

   (a) Inclusion $\subset$ vraie, égalité si f surjective

   (b) Inclusion $\supset$ vraie, égalité si f injective

5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f : E \to F$ pour que

$$\forall\, A,\, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A) = f(B) \Longrightarrow A = B$$

   Réponse : f injective

6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f : E \to F$ pour que

$$\forall\, C,\, D \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(C) = f^{-1}(D) \Longrightarrow C = D$$

   Réponse : f surjective

Inégalités

Inégalité arithmetico-géometrique

1. Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ telle que

   (a) $1 \in A$

   (b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n \in A \Longrightarrow 2n \in A$

   (c) $\forall\, n \geq 2,\ n \in A \Longrightarrow n-1 \in A$

   Montrer que $A = \mathbb{N}^*$

2. Montrer que $\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Étudier le cas d'égalité.

3. Montrer que
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ \geq \ \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}$$

   Indications :

   (a) Utiliser (2) pour montrer la partie (b) de la récurrence

   (b) Pour la partie (c), poser $b_i = a_i$ pour $i \leq n-1$ et $b_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i$