Exercices de colle

Semaine 4

Jonathan Laurent

Théorie des ensembles

1. Soient E, F et I des ensembles, $f : E \to F$. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E et $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de F, montrer que

   (a) Montrer que $f\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f(A_i)$

   (b) Comparer $f\left(\bigcap_i A_i\right)$ et $\bigcap_i f(A_i)$ (*Réponse :* $\subset$ avec égalité pour f injective)

2. Conditions nécessaires et suffisantes sur $f : E \to F$ pour que :

   (a) $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$

   (b) $f^{-1}(f(A)) = A$

   Donner les inclusions varies dans le cas général.

   Réponses :

   (a) Inclusion $\subset$ vraie, égalité si f surjective

   (b) Inclusion $\supset$ vraie, égalité si f injective

3. Soient E et F des ensembles, $f : E \to F$

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

   $$\forall\ A, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A) = f(B) \Longrightarrow A = B$$

   Réponse : f injective

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\forall\, C,\, D \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(C) = f^{-1}(D) \Longrightarrow C = D$$

Réponse : f surjective

Combinatoire

1. Calculer le nombre de bijections de E dans F, avec E et F finis.

2. Soit E un ensemble. Montrer que E est infini si et seulement si

$$\forall\, f : E \to E,\ \exists\, A \subset E,\ A \notin \{\, \emptyset\,,\, E\,\} \text{ et } f(A) \subset A$$

Indication : si E est fini, prendre pour f une permutation circulaire. Si E est infini, $x \in E$, considérer $A = \{\, f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\,\}$.

3. Soient $E = \{\, 0\,, \cdots, p-1\,\}$ et $F = \{\, 0\,, \cdots, n-1\,\}$

(a) Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E vers F ?
Réponse : $\binom{n}{p}$

(b) Combien y a-t-il d'applications croissantes de E vers F ?
Indication : considérer l'application :

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & (E \to F) & \to & (E \to F \cup \{\, n\,, \cdots, n+p-2\,\}) \\ & & f & \mapsto & f + \mathrm{Id}_E \end{array}$$

Réponse : $\binom{n+p-1}{p}$

4. *Nombres de dérangements.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de permutations sans point fixe d'un ensemble à n éléments.

(a) Calculer d_3 *(Réponse : 2)*

(b) Montrer que

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$$

(c) Montrer par récurrence forte sur n que

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

(d) Soit p_n la probabilité qu'une permutation de S_n tirée uniformement soit sans point fixe. Montrer que

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \approx 0.37$$

5. *Nombres de Bell.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit B_n comme étant égal au nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

   (a) Calculer B_n pour $n \in \{ 1 , \cdots , 3 \}$
   Réponse : $1, 2, 5$

   (b) Montrer que :

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Inégalités

Inégalité arithmetico-géometrique

1. Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ telle que

   (a) $1 \in A$

   (b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n \in A \Longrightarrow 2n \in A$

   (c) $\forall\, n \geq 2,\ n \in A \Longrightarrow n-1 \in A$

   Montrer que $A = \mathbb{N}^*$

2. Montrer que $\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Étudier le cas d'égalité.

3. Montrer que

   $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \;\geq\; \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}$$

   Indications :

(a) Utiliser (2) pour montrer la partie (b) de la récurrence

(b) Pour la partie (c), poser $b_i = a_i$ pour $i \leq n-1$ et $b_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i$