Exercices de colle

Semaine 5

Jonathan Laurent

Questions de cours

1. Démontrer à partir de l'inégalité triangulaire que :

$$\left| \sum_{i=0}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n} |\, x_i \,|$$

2. Calculer

$$\sum_{1 \leq i,\, j \leq n} i + j$$

   Réponse : $n^2(n+1)$

3. $\mathbb{Q}$ respecte-t-il la propriété de la borne supérieure ?
   Indication : considérer $A = \{x \in \mathbb{Q}\,,\ x^2 \leq 2\}$

Nombres réels et calcul algébrique

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f est croissante et $1-$périodique. Montrer que f est constante.

2. On pose

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k}$$

   Montrer que

$$\forall x.\ \sin \frac{x}{2^n} \cdot P_n(x) = 2^{-n} \cdot \sin x$$

Combinatoire

1. Soit E un ensemble. Montrer que E est infini si et seulement si

$$\forall\, f : E \to E,\ \exists\, A \subset E,\ A \notin \{\,\emptyset\,,\,E\,\} \text{ et } f\,(A) \subset A$$

   Indication : si E est fini, prendre pour f une permutation circulaire. Si E est infini, $x \in E$, considérer $A = \{\, f^n\,(x) \mid n \in \mathbb{N}\,\}$.

2. Soient $E = \{\,0\,,\cdots,\,p-1\,\}$ et $F = \{\,0\,,\cdots,\,n-1\,\}$

   (a) Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E vers F ?
   Réponse : $\binom{n}{p}$

   (b) Combien y a-t-il d'applications croissantes de E vers F ?
   Indication : considérer l'application :

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & (E \to F) & \to & (E \to F \cup \{\,n\,,\cdots,\,n+p-2\,\}) \\ & & f & \mapsto & f + \mathrm{Id}_E \end{array}$$

   Réponse : $\binom{n+p-1}{p}$

3. *Nombres de dérangements.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de permutations sans point fixe d'un ensemble à n éléments.

   (a) Calculer d_3 *(Réponse : 2)*

   (b) Montrer que

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$$

   (c) Montrer par récurrence forte sur n que

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

   (d) Soit p_n la probabilité qu'une permutation de S_n tirée uniformement soit sans point fixe. Montrer que

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \approx 0.37$$

4. *Nombres de Bell.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit B_n comme étant égal au nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

   (a) Calculer B_n pour $n \in \{1, \cdots, 3\}$
   Réponse : $1, 2, 5$

   (b) Montrer que :
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Inégalités

Inégalité arithmetico-géometrique

1. Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ telle que

   (a) $1 \in A$

   (b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n \in A \Longrightarrow 2n \in A$

   (c) $\forall\, n \geq 2,\ n \in A \Longrightarrow n-1 \in A$

   Montrer que $A = \mathbb{N}^*$

2. Montrer que $\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Étudier le cas d'égalité.

3. Montrer que
   $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}$$

   Indications :

   (a) Utiliser (2) pour montrer la partie (b) de la récurrence

   (b) Pour la partie (c), poser $b_i = a_i$ pour $i \leq n-1$ et $b_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i$