Exercices de colle

Semaine 6

Jonathan Laurent

Analyse

1. Montrer qu'une fonction périodique qui admet une limite finie en $+\infty$ est constante.

2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites et Ω une partie finie de $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall\, n \notin \Omega,\ u_n = v_n$$

   Montrer que si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, alors $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.

3. *(Somme de Cesàro)* Soit $(u_n)_n$ une suite réelle convergent vers l. Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$$

4. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes. Étudier $(\max\{u_n, v_n\})_n$.

5. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On définit $v_n = \sup_{k\geq n} u_k$.

   (a) Montrer que $(v_n)_n$ est décroissante et qu'elle admet une limite finie ou infinie.

   (b) On note $\limsup_n u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$. De même $\liminf_n u_n = \lim_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n} u_k)$. Montrer que u est convergente si et seulement si $\limsup_n u_n = \liminf_n u_n$.

Questions rapides

1. *(Facile)* Montrer que la somme de deux suites bornées est bornée.

2. Étudier

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$$