

TD 1 : Introduction à Maple

Septembre-Octobre 2012

Maple, qu'est-ce que c'est ?

Maple est - en gros - une calculatrice très évoluée. Au contraire de vos petites machines portables, il sait non seulement manipuler les nombres, mais également les objets, ce qui lui permet de faire toutes sortes de choses : calculer des intégrales, résoudre des équations différentielles, etc... On appelle ce type de calcul du calcul *formel*. En plus de cela, Maple dispose aussi d'un langage de programmation interprété, qui offre un environnement plus informatique que mathématique.

Maple en prépa En prépa, on utilise ces deux aspects du logiciel pour se préparer aux deux concours qui le demandent :

Centrale-Supélec On vous demandera systématiquement, lors de vos oraux de maths ou de physique, de passer sur l'ordinateur et d'effectuer un calcul en lien avec votre exercice. Cela peut aller d'une simple utilisation de Maple comme calculatrice à un tracé de graphe. Toutes les séries sont concernées par cette épreuve.

X-Ens Contrairement à Centrale, seuls les futurs MP-SI-stes et PSI sont concernés. Ils auront à passer une épreuve écrite d'*Algorithmique* de deux heures, dans laquelle on leur demandera de programmer en Maple ou en Java quelques petits algorithmes pour résoudre un problème. Aux Ens, pour l'instant, seuls les candidats passant l'option physique passent cette épreuve pour Cachan.

Le Principe Zéro : Sauvegarder

Avant toute chose, il importe que vous fassiez *très* régulièrement des sauvegardes de vos feuilles de calcul. Il arrive de temps en temps que Maple plante sans que vous sachiez trop pourquoi, et dans ces cas-là, on aime mieux ne pas avoir à tout recommencer dès le début. Sauvegardez tout le temps, donc.

Passons à la pratique

Syntaxe de base

En ouvrant Maple pour la première fois, on se retrouve face à une ligne vide nous invitant à entrer une commande. C'est de cette façon que l'on communique avec le logiciel. La seule subtilité est que ces commandes doivent se terminer obligatoirement par un point virgule ';' (ou par deux points ':', mais le résultat est alors calculé mais pas affiché, on s'en servira au moment de faire de la programmation).

Même si dans ses dernières versions, Maple est assez intelligent pour passer outre un oubli de point virgule, forcez vous à les mettre tout le temps, vous ne savez pas sur quel genre de vieille machine vous tomberez au concours.

Hormis cette histoire de point virgule, tout est assez intuitif. On utilisera ****** ou **^** pour l'exponentiation (mettre à une puissance), et la commande **'%** sert à rappeler le résultat du calcul précédent.

```
> 2+2:  
> %;
```

On peut aussi doubler, voire tripler l'usage du %, pour remonter d'autant de fois dans l'historique des calculs.

```
> 6*7;
                                42
> 2^32;
                                4294967296
> 671*(1/11);
                                61
> %%;
                                42
```

Exercice 1

Maintenant que vous savez comment tout marche, entraînez-vous sur quelques calculs simples. Pensez surtout au point virgule !

Fonctions de base

Non content de savoir additionner et multiplier, Maple dispose d'une assez grosse bibliothèque de fonctions prédéfinies (environ 2500). On accède à celles-ci de façon naturelle, en connaissant leur nom. Il y a bien sûr les fonctions trigonométriques circulaires (**sin**, **cos**, **tan**, **arcsin**, **arccos**, **arctan**), hyperboliques (**sinh**, **tanh**, **arccosh**, etc...), le logarithme népérien (**ln** ou **log**), l'exponentielle (**exp**), la valeur absolue (**abs**), la factorielle (!), et encore beaucoup d'autres.

Votre nouveau meilleur ami : l'aide de Maple Comme il est impossible de condenser les informations sur toutes les fonctions de Maple, et encore moins de s'en souvenir pendant les deux prochaines années, vous devez absolument savoir accéder à l'aide de Maple. Celle-ci vous sauvera la vie lorsque vous ne saurez plus trop quel est le nom ou la syntaxe exacte d'une fonction. On peut y accéder soit par le menu 'Help', puis 'Topic Search', ou alors, pour obtenir l'aide de `ma_fonction`, directement en ligne de commande :

```
> ?ma_fonction;
```

Exercice 2

Entraînez-vous à chercher dans l'aide Maple :

- ▷ Que fait la fonction `irem` ? et `iquo` ?
- ▷ Quel commande faut-il employer pour calculer le binôme de Newton ?

Approximer ses résultats : evalf Observons comment Maple calcule certaines choses :

```
> sin(Pi);
                                0
```

Tout va bien. Profitez-en pour remarquer qu'on accède au nombre π par la variable `Pi`. Maintenant, calculons `sin(10)`

```
> sin(10);
                                sin(10)
```

Aïe. Est-ce que tout ça valait bien les centaines d'euros dépensées pour acheter le logiciel ? En fait oui. On a vu que Maple ne manipulait pas des approximations numériques mais des nombres exacts. Or, `sin(10)` étant irrationnel, la seule façon de le décrire exactement est de le laisser tel quel. Malin, non ?

Il arrive cependant que l'on veuille connaître une valeur approchée de ce même nombre `sin(10)`. On utilise alors la fonction `evalf`.

```
> evalf(%);
-0.5440211109
```

Exercice 3

Vous pouvez maintenant vous échauffer les doigts sur des calculs un peu plus poussés. Essayez de trouver une valeur approchée de π , de compter le nombre de zéros à la fin de $34!$.

La fonction `evalf` admet également un second argument optionnel : le nombre de chiffres donnés après la virgule. En déduire la 35^{ème} décimale de $\sqrt{2}$. NB : On peut aussi, pour le même résultat, modifier la variable `Digits`. Ceci n'est à employer que si tous vos calculs ont besoin d'une précision donnée.

Définir ses propres fonctions et variables

Même si Maple connaît déjà par défaut de nombreuses fonctions et constantes mathématiques (le `I`, par exemple, qui représente le i complexe), il peut vous être utile de définir vos propres variables. On utilise pour ce faire la notation `:=`.

```
> MaVariable := 12;
12
> MaVariable;
12
```

Attention aux majuscules ! La variable 'Variable' n'est pas la même que 'variable', ni que 'VARIABLE', ni que 'VarIAble', etc... De plus une affectation à une variable reste dans la mémoire de Maple même si on efface la ligne qui la déclare. Vous aurez parfois besoin d'effacer totalement tout ce que Maple sait sur une certaine variable (disons `bidule`). Dans ce cas, il faut employer la commande `unassign` qui s'utilise ainsi (n'oubliez pas les `'`, c'est important) :

```
> unassign('bidule');
```

Maple n'a pas besoin qu'une variable soit définie pour la manipuler littéralement. Par exemple, sans avoir au préalable touché à la variable x :

```
> 5*x+x;
6 x
```

On pourrait en déduire une méthode pour créer et évaluer ses propres fonctions :

```
> f := x^2+3*x+2;
x + 3 x + 2
> x := 2;
2
> f;
12
```

Même si ça marche, ce n'est ni beau ni très pratique. Heureusement, on peut faire autrement. On emploie la syntaxe fonction `:=variable->expression(variable)`. Par exemple :

```
> f := x -> x^2+3*x+2;
x -> x + 3 x + 2
> f(7);
72
```

Exercice 4

Calculer les valeurs de $\cos(x\pi/6)$ pour x variant entre 0 et 5.

Graphes

On trace des graphes de fonctions avec la syntaxe `plot(expression, intervalle)`. Par exemple :

```
> plot ( x^2+cos(x), x=0..5);
```

Cette commande (et son companion `plot3d`) peut s'employer de plein de manière différentes. Référez vous au manuel (`?plot`) pour connaître ses autres emplois et options.

Exercice 5

Tracer la fonction $\ln(x) - \sqrt{x}$ pour x variant entre 1 et 10. Compter visuellement le nombre de racines réelles du polynôme $3x^3 - 4x + 10$.

Outils de calcul littéral

Passons en revue quelques outils qui rendent Maple puissant.

expand Cette fonction s'utilise avec la syntaxe `expand(expression)`. Elle tente de développer l'expression fournie en argument.

```
> expand((x+1)*(x+2));
```

$$x^2 + 3x + 2$$

factor Elle est en quelque sorte le contraire de la précédente, puisqu'elle factorise une expression donnée.

```
> factor(5*x^3-22*x^2+18*x-1);
```

$$(x - 1) \sqrt[5]{x^2 - 17x + 1}$$

simplify Celle-ci est un peu magique. Il lui arrive de fonctionner quand une des deux autres a échoué, et inversement.

```
> simplify(cos(x)^2+sin(x)^2);
```

$$1$$

solve Cette fonction résout des équations ou systèmes d'équations de façon exacte ou approchée :

```
> solve(x^3+x^2+x +1= 0, x);
```

```
-1, I, -I
```

La réponse est parfois donnée sous la forme `RootOf(...)`. On utilisera la commande `allvalues(%)` ; pour expliciter la ou les solution(s).

```
> solve({x*y = 2, x+y = 1}, {x, y});
```

$$x = -\text{RootOf}\sqrt[2]{-Z} - Z + 2, \text{ label} = _L1/ + 1,$$

$$y = \text{RootOf}\sqrt[2]{-Z} - Z + 2, \text{ label} = _L1/$$

```
> allvalues(%);
```

$$\left\{ x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} I \sqrt[2]{7}, y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} I \sqrt[2]{7} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{7} \\ y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{7} \end{array} \right.$$

Maple sait résoudre les équations formelles (du type $ax + b = 0$) à condition de préciser en second argument de solve la variable par rapport à laquelle on veut résoudre l'équation.

Systemes On peut résoudre des systèmes de plusieurs équations avec la syntaxe `solve({equation1, ..., equationn}, {variable1, ..., variablen})`

Exercice 6

S'entraîner à résoudre quelques systèmes d'équations, linéaires et non linéaires. Pouvez-vous résoudre une équation diophantienne de cette manière? (Pensez à chercher dans l'aide!!!)

Quelques exercices d'entraînement

Exercice 7

Simplifier :

$$\sqrt[3]{8} + 5 - \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-7 + 5\sqrt{2}}$$

Exercice 8

Développer $\cos(2x) + \sin(2x)$

Exercice 9

Montrer les égalités trigonométriques suivantes :

$$\begin{array}{ll} \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} & \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b)) \\ \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} & \cos(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b)) \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x & \sin a \cos b = \frac{\sin(a + b) - \sin(a - b)}{2} \\ \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} & \arctan(a) = \arctan(b) + \arctan\left(\frac{a - b}{1 + ab}\right) \end{array}$$

Exercice 10

Linéariser $\cos^3(x)$, $\cos^5(x)$, et $\cos^8(x)$ puis faire de même avec les sin correspondant. On utilisera la fonction `combine`.

Exercice 11

Lire la documentation de la fonction `assume`, et l'utiliser pour simplifier $\sqrt{x^2 - 8x + 16}$ sans faire apparaître de valeur absolue.

Exercice 12

Redémontrer les formules utilisant la tangente de l'arc moitié. Rappel : si l'on pose $t = \tan x/2$, on a :

$$\begin{array}{ll} \cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} & \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2} \\ \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2} & dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \end{array}$$

Exercice 13

Résoudre les équations suivantes :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\cos x = x$$

Exercice 14

Déterminer les points d'intersection du cercle unité avec les droites d'équations suivantes :

$$y = 1/2$$

$$y = x$$

$$y = 2x - 2$$

$$x = \sqrt{3}/2$$

Tracez chaque figure géométrique associée sur un graphe.

Contact

Ce TD et son corrigé sont sur le web à l'adresse www.eleves.ens.fr/home/kmaillar/. Pour toute question que vous n'auriez pas osé poser pendant la séance, pour clarifier un point un peu obscur de mon propos, ou encore pour une discussion enflammée et passionnée à propos de Maple, vous pouvez m'envoyer un mail à kenji.maillard@ens.fr.

