TD 7 : Courbes, Fractales et Ski !

Janvier 2013

Dans ce TD, on fait un usage plus avancé des commandes graphiques de Maple pour tracer, colorer, dériver ou animer des graphes de fonctions, des courbes paramétriques, des surfaces ou des fractales.

Fonctions d'une variable réelle

Rappels On utilise la syntaxe suivante pour tracer plusieurs fonctions sur le même graphe :

```
plot( [expr1, ..., exprn], variable=deb..fin, color=[c1,...,cn], style=[s1,...,sn])
```

Mentionner les couleurs et les styles est cependant facultatif (voir dans l'aide).

Il est également possible de préciser des options lors du tracé du graphe, en les passant en dernier argument de plot. Ces options peuvent être, par exemple, `discont = true` pour ne pas relier les points de discontinuité, `y=a..b` pour préciser la taille du cadre en y, ou `numpoints = truc` pour préciser le nombre de points tracés par Maple (par défaut 50). Reportez-vous à l'aide de `plot` pour plus d'exhaustivité.

Exercice 1

1. *Tracer la fonction "partie entière" (`floor` en Maple) en faisant apparaitre clairement sa non-continuité.*
2. *De même, obtenir un tracé de la fonction tangente raisonnable et bien proportionné.*
3. *Tracer les fonctions $\ln(x)$ et $\sqrt{x}$ en vert et bleu respectivement, sur un même graphique, pour x variant entre 1 et 50.*
4. *Déterminer le lieu du (des ?) maximum (ou maxima ? ?) de la fonction $x\exp(-x)$ en la traçant en même temps que sa dérivée.*
5. *Tracer la fonction $x^3\sin(e^{\frac{1}{x}})$ entre 0.15 et 0.2 normalement, puis avec un plus grand nombre de points. Est-ce que cela change quelque chose ?*

Courbes paramétriques

On trace les courbes paramétriques cartésiennes de la façon suivante : `plot([x(t),y(t),t=a..b]` (attention à ne pas confondre avec le tracé simultané de deux fonctions). Pour un paramètre polaire, vous pouvez écrire soit `polarplot(r(`θ`), `θ`=a..b)`, soit `plot(r(`θ`), `θ`=a..b, coords =polar)`.

Exercice 2 (*Petit bestiaire de courbes*)

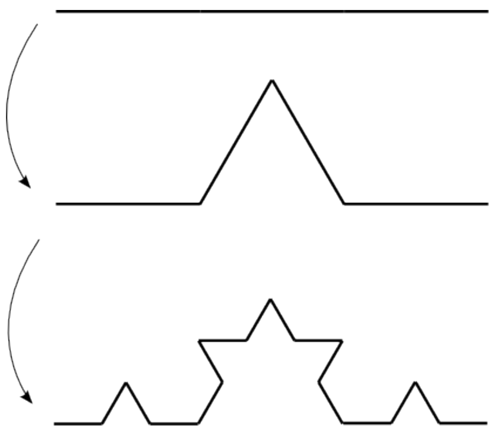
Tracer les courbes paramétriques suivantes :

1. Cardioïde : $r = 1 + \cos\theta$
2. Cochléoïde : $r = \frac{\sin\theta}{\theta}$
3. Campyle d'Eudoxe : $r = 1/\cos^2\theta$
4. Lemniscate de Bernoulli : $x = \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}$, $y = \frac{\sin t\cos t}{1+\cos^2 t}$
5. Trèfle de Habenicht : $r = 1 + \cos n\theta + \sin^2 n\theta$ (*n est le nombre de feuilles) (essayer de l'animer)*
6. Courbes de Lissajous : $x = \sin t$, $y = \sin(nt+\phi)$ *(prendre $0 < \phi < \pi/2$)*

Le flocon de Koch

On va à présent tenter de dessiner les premières itérations de la courbe fractale connue sous le nom de flocon de Koch (ou de von Koch). A partir d'un segment de base, celle-ci se construit de la sorte :

1. Couper le segment en trois parties égales
2. Dessiner un triangle équilatéral ayant pour base le sous-segment du milieu
3. Effacer ce sous-segment
4. Appliquer l'étape 1 aux 4 nouveaux petits segments



Exercice 3 (*Calcul*)

On veut créer une fonction qui, à partir d'un segment de base (donné par deux points) et d'un entier n, renvoie la liste des points composant la n-ième itération de la courbe de Koch.

Pour faciliter le calcul, on manipulera des nombres complexes pour représenter les points du plan (rappel : l'unité complexe se note `I`).

1. *Écrire `rotation := proc (a,b,θ)`, la procédure qui renvoie l'image du complexe b par la rotation de centre a et d'angle θ.*
2. *Trouver les affixes des 5 points de la courbe après une itération en fonction de a et b les affixes des extrémités du segment de base. En déduire la fonction `etape1:=proc(a,b)` qui renvoie cette liste en Maple.*
3. *Finalement, écrire la fonction récursive (*ie *qui s'appelle elle-même) `flocon0 := proc (a,b,n)` renvoyant la liste de points recherchée. En déduire la fonction `flocon := proc(n)` qui applique `flocon0` aux segments $[1;j]$, $[j;j^2]$, $[j^2;1]$.*
4. *Quelle est l'aire du flocon complet (à l'infini) s'il a été construit à partir d'un triangle d'aire 1 ?*

Tracé du flocon

La fonction `plot` permet de tracer des courbes données par des listes de points (sous la forme `plot([[x1,y1],...,[xn,yn]])`).

Exercice 4

Adapter la fonction `flocon` de l'exercice précédent pour que le résultat final soit une liste de points *et non plus de complexes. Tracer le flocon.*

Maple sait animer des images données par des listes de points. Il faut utiliser la commande `display(liste, insequence=true,axes=none)`, où `liste` est une liste de graphiques (du style `plot(...)`, donc).

Exercice 5

Animer la construction du flocon de Koch !

Courbe du blanc-manger

La courbe du blanc-manger est la courbe donnée par

$$bl(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(2^n x)}{2^n} \qquad\qquad d : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & min(x, 1-x) \end{array} \right.$$

où $d(x)$ est la fonction distance à un entier.

Exercice 6

1. *Écrivez puis tracez la fonction d.*
2. *Écrivez une fonction calculant les sommes partielles de la courbe de blanc-manger.*
3. *Tracez et animez la construction de la courbe.*
4. Bonus : *conjecturez la régularité de la courbe (continuité, dérivabilité) puis démontrez-le.*