Quelques exemples de calculs de limites

David A. Madore

18 octobre 2001

1er exemple : étudier la limite de $5x^3 + x^2 + 42$ lorsque $x \to -\infty$.

Lorsque $x \to -\infty$, on a $5x^3 \to -\infty$ et $x^2 \to +\infty$, donc la forme est indéterminée. Cependant, il s'agit d'un polynôme, et la technique pour résoudre l'indétermination est très classique : elle consiste à factoriser pour isoler le terme dominant. On écrit donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $5x^3 + x^2 + 42 = x^3(5 + \frac{1}{x} + \frac{42}{x^3})$. Cette fois, lorsque $x \to -\infty$, on a $\frac{1}{x} \to 0$ et $\frac{42}{x^3} \to 0$, de sorte que $5 + \frac{1}{x} + \frac{42}{x^3} \to 5$; et comme $x^3 \to -\infty$, on a $x^3(5 + \frac{1}{x} + \frac{42}{x^3}) \to -\infty$, autrement dit $5x^3 + x^2 + 42 \to -\infty$.

2e exemple : calculer la limite de $\frac{12x^2+7x+2}{(x-1)(\pi x+3)}$ lorsque $x \to +\infty$.

De même que dans le 1er exemple, on a affaire à une forme indéterminée, cette fois dans une fonction rationnelle. La technique est la même : isoler le terme dominant, tant au numérateur qu'au dénominateur. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -\frac{3}{\pi}\}$, on écrit donc $\frac{12x^2+7x+2}{(x-1)(\pi x+3)} = \frac{12+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}}{(1-\frac{1}{x})(\pi+\frac{3}{x})}$ (après avoir extrait x^2 du numérateur et du dénominateur). Lorsque $x \to +\infty$, on voit que le numérateur de cette expression tend vers 12 et le dénominateur vers π. On a donc montré que $\frac{12x^2+7x+2}{(x-1)(\pi x+3)} \to \frac{12}{\pi}$ lorsque $x \to +\infty$.

3e exemple : étudier la limite de $\frac{31x+1729}{8-x-x^2}$ quand $x \to +\infty$.

Même situation que dans l'exemple précédent — il faut juste veiller à bien trouver le terme dominant et à comparer leurs degrés ! On écrit $\frac{31x+1729}{8-x-x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{31+\frac{1729}{x}}{-1-\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}}$ (en tout point du domaine de définition). Quand $x \to +\infty$, on a $\frac{1}{x} \to 0^+$, et $\frac{31+\frac{1729}{x}}{-1-\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}} \to -31$, donc $\frac{31x+1729}{8-x-x^2} \to 0^-$ (on n'est pas obligé d'être si précis : il est tout à fait correct de retirer le signe en exposant au 0).

4e exemple : déterminer la limite de $\frac{x^4-x^3-x+1}{x^7-x^6+x^5-x^4+x-1}$ quand $x \to 1$.

Cette fois, on étudie une fraction rationnelle en un point réel (i.e. fini). La forme est indéterminée, c'est-à-dire que le numérateur et le dénominateur s'annulent tous deux en $x = 1$: ces polynômes y ont donc une racine, et on peut les factoriser par $(x-1)$. Précisément, pour tout x réel on a $x^4 - x^3 - x + 1 = (x-1)(x^3-1)$ et $x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x - 1 = (x-1)(x^6 + x^4 + 1)$ (dans le cas général, il faudrait poser la division des polynômes, mais ici c'est très facile à voir). On a donc, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{x^4-x^3-x+1}{x^7-x^6+x^5-x^4+x-1} = \frac{x^3-1}{x^6+x^4+1}$, ce qui résout l'indétermination, et quand $x \to 1$, on voit alors aisément que cette expression tend vers 0.

5e exemple : étudier la limite de $\sqrt{x^2+x}+x$ quand $x \to -\infty$.

Ici, on a une forme indéterminée causée par une somme de racines : on introduit donc la quantité conjuguée, et on écrit $(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x) = (x^2+x)-x^2 = x$ pour tout x tel que $x^2+x \geq 0$ (c'est-à-dire $x \leq -1$ ou $x \geq 0$). On a donc, pour de tels x, $\sqrt{x^2+x}+x = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$, et pour $x < -1$, cela vaut encore $\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}$ (attention ! pour $x \leq 0$, on a $\sqrt{x^2} = -x$). Par conséquent, lorsque $x \to -\infty$, $\sqrt{x^2+x}+x \to -\frac{1}{2}$.

6e exemple : étudier la limite de $\sqrt{x^4+2x^3}+x^2-2\sqrt{x^4+x^3}$ pour $x \to +\infty$.

Cet exemple est un peu vicieux, il s'agit d'abord de ne pas perdre son sang-froid. Écrivons d'abord $\sqrt{x^4+2x^3}+x^2-2\sqrt{x^4+x^3} = (\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+x^3})+(x^2-\sqrt{x^4+x^3})$, de façon à pouvoir faire apparaître des quantités conjuguées. En effet, $\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+x^3} = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+2x^3}+\sqrt{x^4+x^3}}$ et de même $x^2-\sqrt{x^4+x^3} = -\frac{x^3}{x^2+\sqrt{x^4+x^3}}$, de sorte que l'on a $\sqrt{x^4+2x^3}+x^2-2\sqrt{x^4+x^3} = \frac{x}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} - \frac{x}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$ (pour $x > 0$). En rapportant ces deux termes au même dénominateur $D = \left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$, le numérateur vaut $N = x\Big(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\Big)$, soit $x\left(1-\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)$. Pour déterminer la limite de N, on introduit une nouvelle fois la quantité conjuguée : $N = -\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$, donc $N \to -1$ lorsque $x \to +\infty$, et par ailleurs, $D \to 4$ (il n'y a pas là de forme indéterminée). Donc finalement, $\sqrt{x^4+2x^3}+x^2-2\sqrt{x^4+x^3} \to -\frac{1}{4}$ lorsque $x \to +\infty$.

7e exemple : étudier la limite de $\sqrt[3]{x^3+x^2}-x$ quand $x \to +\infty$.

Avec les racines cubiques, il s'agit de faire intervenir l'identité remarquable $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. On écrit donc $(x^3+x^2)-x^3 = (\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)$ $(\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2)$. Par conséquent, $\sqrt[3]{x^3+x^2}-x$ se réécrit comme $\left(\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1\right)^{-1}$, et la limite recherchée est $\frac{1}{3}$.

8e exemple : calculer la limite de $\frac{e^{\sqrt{x^2+x}}}{1+e^x}$ lorsque $x \to +\infty$.

L'idée est que le 1 au dénominateur ne contribue pour rien. Pour expliciter ce fait, écrivons $\frac{e^{\sqrt{x^2+x}}}{1+e^x} = \frac{e^{\sqrt{x^2+x}}}{e^x} \cdot \frac{1}{e^{-x}+1}$: le second facteur tend vers 1, et le premier se réécrit $e^{\sqrt{x^2+x}-x}$. Comme $\sqrt{x^2+x}-x = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$ (pour $x \geq 0$), on a $\sqrt{x^2+x}-x \to \frac{1}{2}$ lorsque $x \to +\infty$; on a donc $e^{\sqrt{x^2+x}-x} \to \sqrt{e}$, et finalement

$\frac{e^{\sqrt{x^2+x}}}{1+e^x} \to \sqrt{e}$.

9e exemple : calculer la limite de $\frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{\theta(1-\cos\theta)}$ lorsque $\theta \to 0$.

Rappelons que $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$. On a donc $3\sin\theta - \sin 3\theta = 4\sin^3\theta$. Par ailleurs, $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ de sorte que $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$. Il s'agit donc de calculer la limite de $\frac{4\sin^3\theta}{2\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}$. Cela se réécrit comme $8\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\frac{(\frac{\theta}{2})^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$. Lorsque $\theta \to 0$, on a $\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$, et de même $\frac{\theta}{2} \to 0$ donc $\frac{(\frac{\theta}{2})}{\sin\frac{\theta}{2}} \to 1$, donc les deux derniers facteurs de cette expression tendent vers 1, et la limite recherchée est 8.

10e exemple : calculer la limite de $\frac{\sqrt{3}\cos t - \sin t}{t - \frac{\pi}{3}}$ lorsque $t \to \frac{\pi}{3}$.

On a $\sqrt{3}\cos t - \sin t = 2(\cos t \sin\frac{\pi}{3} - \sin t\cos\frac{\pi}{3}) = 2\sin(\frac{\pi}{3} - t)$. Lorsque $t \to \frac{\pi}{3}$, on a $\frac{\sin(t-\frac{\pi}{3})}{t-\frac{\pi}{3}} \to 1$, donc la limite recherchée est -2.

11e exemple : étudier la limite de $e^{x^2} - e^x$ quand $x \to +\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{x^2} - e^x = e^x(e^{x^2-x} - 1) = e^x(e^{x^2(1-\frac{1}{x})} - 1)$. Lorsque $x \to +\infty$, on a $1 - \frac{1}{x} \to 1$, donc $e^{x^2(1-\frac{1}{x})} \to +\infty$, donc $e^{x^2(1-\frac{1}{x})} - 1 \to +\infty$, et comme $e^x \to +\infty$ on a $e^x(e^{x^2(1-\frac{1}{x})} - 1) \to +\infty$, c'est-à-dire $e^{x^2} - e^x \to +\infty$.

12e exemple : étudier la limite de $\sqrt{u + \sin u} - \sqrt{u}$ lorsque $u \to +\infty$.

À nouveau, on introduit la quantité conjuguée : on a $\sqrt{u+\sin u} - \sqrt{u} = \frac{\sin u}{\sqrt{u+\sin u}+\sqrt{u}}$. Lorsque $u \to +\infty$, la quantité $\sin u$ *reste bornée* (entre -1 et 1). Et la quantité $\frac{1}{\sqrt{u+\sin u}+\sqrt{u}}$ tend vers 0 (en effet, $u + \sin u$ est minorée par $u - 1$ qui tend vers $+\infty$, donc elle tend aussi vers $+\infty$). Leur produit tend donc vers 0, qui est la limite recherchée.

13e exemple : déterminer la limite de $\sqrt{x}\ln\tan x$ quand $x \to 0^+$.

On a $\ln\tan x = \ln x + \ln\frac{\sin x}{x} - \ln\cos x$ (pour x assez petit et positif). Or quand $x \to 0$, on a $\frac{\sin x}{x} \to 1$ et $\cos x \to 1$, de sorte que $\ln\frac{\sin x}{x} \to 0$ et $\ln\cos x \to 0$, et *a fortiori* $\sqrt{x}\ln\frac{\sin x}{x} \to 0$ et $\sqrt{x}\ln\cos x \to 0$. Enfin, $\sqrt{x}\ln x = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}$. Mais on sait que si $y \to 0^+$ on a $y\ln y \to 0$: puisque $\sqrt{x} \to 0^+$ quand $x \to 0$, on a aussi $\sqrt{x}\ln\sqrt{x} \to 0$. Et finalement, la limite recherchée est 0.

14e exemple : étudier la limite de $z(\ln(z+1) - \ln z)$ pour $z \to +\infty$.

On a $\ln(z+1) - \ln z = \ln\frac{z+1}{z} = \ln(1 + \frac{1}{z})$ pour tout $z > 0$. Rappelons que la dérivée de $\ln$ en 1 est 1 : cela signifie précisément que $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = 1$. Autrement dit $\frac{1}{h}\ln(1+h) \to 1$ quand $h \to 0$. On a donc $z\ln(1+\frac{1}{z}) \to 1$ quand $z \to +\infty$. Ceci montre donc que $z(\ln(z+1) - \ln z) \to 1$ quand $z \to +\infty$.

15e exemple : calculer la limite de $\mathsf{E}(x)/x$ quand $x \to +\infty$, où $\mathsf{E}(x)$ désigne la fonction partie entière.

On sait que pour tout réel x on a $x - 1 < \mathsf{E}(x) \leq x$ (avec de plus $\mathsf{E}(x)$ entier, et ceci caractérise la fonction partie entière). On a donc $1 - \frac{1}{x} < \frac{\mathsf{E}(x)}{x} \leq 1$ pour tout $x > 0$. Quand $x \to +\infty$, on a $1 - \frac{1}{x} \to 1$. On a donc montré que $\frac{\mathsf{E}(x)}{x}$

est encadrée au voisinage de $+\infty$ par deux fonctions de limite 1, c'est donc que $\frac{\mathsf{E}(x)}{x} \to 1$ également.

16e exemple : étudier la limite de $e^{1/x}\,\mathsf{E}(\sin x)$ quand $x \to 0^+$.

Lorsque $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on a $0 < \sin x < 1$, et par conséquent $\mathsf{E}(\sin x) = 0$ (autrement dit, la fonction $x \mapsto \mathsf{E}(\sin x)$ est constamment égale à 0 sur $]0; \frac{\pi}{2}[$). On a donc aussi $e^{1/x}\,\mathsf{E}(\sin x) = 0$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, et la limite est 0 (non seulement la fonction *tend vers* 0, mais même elle *vaut* 0 sur tout un voisinage à droite de 0).

17e exemple : déterminer la limite de $(x-1)e^{1/\ln x}$ quand $x \to 1^+$.

Effectuons le changement de variable $x = 1 + h$: il s'agit donc de déterminer la limite de $he^{1/\ln(1+h)}$ quand $h \to 0^+$. Comme on l'a observé plus haut (14e exemple), on a $\frac{1}{h}\ln(1+h) = 1$ lorsque $h \to 0$, et en particulier lorsque $h \to 0^+$. D'après la définition de la limite, il existe donc un certain $\alpha > 0$ tel que si $0 < h < \alpha$ on ait, disons, $0.9 < \frac{1}{h}\ln(1+h) < 1.1$, c'est-à-dire $0.9\,h < \ln(1+h) < 1.1\,h$. On a alors $\frac{1}{1.1\,h} < \frac{1}{\ln(1+h)} < \frac{1}{0.9\,h}$, et donc $\frac{0.9}{h} < \frac{1}{\ln(1+h)} < \frac{1.2}{h}$. Mais alors, la fonction exponentielle étant croissante, on a $e^{0.9/h} < e^{1/\ln(1+h)} < e^{1.2/h}$. Donc $he^{0.9/h} < he^{1/\ln(1+h)} < he^{1.2/h}$.

On sait que $\frac{e^u}{u} \to +\infty$ quand $u \to +\infty$. On a donc, pour $u = 0.9/h$, $\frac{h}{0.9}e^{0.9/h} \to +\infty$ quand $h \to 0^+$, et par conséquent $he^{0.9/h} \to +\infty$. Mais sur un certain voisinage à droite de 0 (à savoir, $]0; \alpha[$), la quantité $he^{0.9/h}$ minore, on l'a vu, $he^{1/\ln(1+h)}$. Puisque $he^{0.9/h} \to +\infty$ quand $h \to 0^+$, on a certainement aussi $he^{1/\ln(1+h)} \to +\infty$. On a donc prouvé $(x-1)e^{1/\ln x} \to +\infty$ pour $x \to 1^+$.

18e exemple : étudier la limite de $e^{x+\sin x} - e^x$ quand $x \to +\infty$.

Il s'agit cette fois de prouver que la limite n'existe pas. (Il ne suffit évidemment pas de dire que $\sin x$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$; d'ailleurs, $x + \sin x$, lui, admet une limite quand $x \to +\infty$, à savoir $+\infty$, puisqu'il est minoré par $x - 1$ qui tend vers $+\infty$.)

Posons $f(x) = e^{x+\sin x} - e^x$. Si $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $e^{x+\sin x} - e^x = (e-1)e^x$. Puisque $e - 1 > 0$, on voit que ceci tend vers $+\infty$ lorsque $k \to +\infty$. En revanche, si $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ alors $e^{x+\sin x} - e^x = (\frac{1}{e} - 1)e^x$, et ceci tend vers $-\infty$ quand $k \to +\infty$.

On a donc $f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \to +\infty$ et $f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \to -\infty$, quand $k \to +\infty$. Mais $f(x)$ ne peut pas admettre une limite ℓ (finie ou infinie) quand $x \to +\infty$, car si tel était le cas on aurait $f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \to \ell$ et $f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \to \ell$, donc ces deux limites seraient égales, et on vient de voir qu'elles ne le sont pas.