La ville de Casimir

Paul Melotti

13 juillet 2011

1 Énoncé

Dans la ville de Casimir, beaucoup de gens se connaissent. Lors des fêtes, il y a toujours strictement moins de présentations à faire que d'invités (A, voici B et B, voici A compte pour une présentation). Montrer qu'on peut diviser la ville en deux groupes à l'intérieur desquels tout le monde se connaît.

2 Où l'on pose le problème

On appelle *ville* un ensemble fini muni d'une relation "connaît" définie pour deux éléments distincts [1]. Le problème peut être interprété de différentes façons, mais on choisit de se placer dans le cas le plus général : la relation "connaît" n'est pas symétrique, et encore moins transitive ou toute autre propriété bizarre. On appelle *personne* un élément d'une ville. Et un couple de personnes sera considéré comme non-ordonné (les couples A/B et B/A sont égaux).

On dit que deux personnes distinctes A et B *sont amies* ssi A connaît B et B connaît A. On pourra aussi dire de manière équivalente que A *est ami avec* B, ou que B *est ami avec* A.

Attention, vu cette définition, dire que A et B ne sont pas amis peut signifier que :

- A ne connaît pas B et B ne connaît pas A
- A connaît B mais B ne connaît pas A
- le contraire (vous avez compris)

Ainsi, dans un ville de n personnes, il y a $2 * \binom{n}{2}$ liens de connaissance potentiels (2 pour chaque couple), et $\binom{n}{2}$ liens d'amitiés potentiels (autant que de couples).

On dit d'une ville qu'elle est *de Casimir* lorsqu'elle a la propriété suivante : si on rassemble p personnes quelconques de la ville, il y a strictement moins de p couples de gens qui ne sont pas amis. Cela correspond bien à la convention de l'énoncé : il y a présentation à faire entre A et B ssi A ne connaît pas B ou B ne connaît pas A, ce qui est bien notre définition de "A et B ne sont pas amis".

3 Où l'on montre la propriété fondamentale

Le but va être de montrer que toute ville de Casimir contient une célébrité locale, que nous appellerons, avec une grande originalité, Casimir. Tout le monde est ami avec Casimir, sauf éventuellement un pecno fraîchement débarqué en ville, que nous appellerons l'arrière-cousin de

1. On ne va tout de même pas ergoter : on ne dira pas que A connaît A. Ou alors on considère que A connaît toujours A. Ce qui revient au même, de toutes façons on oubliera sournoisement les auto-connaissances dans tout le problème. Et j'avais dit que je n'ergoterais pas, ce que je suis précisément de train de faire.

M.Dusnob. Bref, ne nous le cachons pas, dans une ville de n personnes un *Casimir* est défini comme un ami d'au moins $n-2$ personnes.

Propriété. *Toute ville de Casimir contient un Casimir*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'une ville de Casimir n'ait pas de Casimir, i.e. que chaque personne de la ville soit amie avec strictement moins de $n-2$ personnes. Dénombrons alors les couples d'amis.

On a n personnes, chacune étant amie avec au plus $n-3$ personnes, donc le nombre de couples d'amis est inférieur à $\frac{n(n-3)}{2}$ (on divise par 2 car "A est ami avec B" et "B est ami avec A" sont équivalents : ils ne nous donnent qu'un couple d'amis).

D'un autre côté, comme notre village est de Casimir il contient au plus $n-1$ couples de non-amis. Il y a donc au moins $\binom{n}{2}-(n-1)$ couples d'amis. Or :

$$\binom{n}{2}-(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{n^2-3n+2}{2}>\frac{n^2-3n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$$

Ainsi, si N est le nombre de couples d'amis, on devrait avoir

$$N\geq\binom{n}{2}-(n-1)>\frac{n(n-3)}{2}\geq N$$

Ce qui ne saurait être. □

4 Où l'on procède à une vulgaire récurrence

Maintenant qu'on a trouvé Casimir, on peut passer à la démonstration proprement dite. On prouve par récurrence sur $n\geq 2$ la propriété :

$\mathcal{P}(n)$: « Toute ville de Casimir de n personnes peut être divisée en deux parties non vides à l'intérieur desquelles tout le monde est ami ».

Démonstration. $\mathcal{P}(2)$ est vraie, comme le montre la légendaire équation $2=1+1$.

Soit $n\geq 2$; supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit alors une ville de Casimir de $n+1$ personnes. D'après la propriété fondamentale, cette ville contient un Casimir. Supprimons Casimir [2]. On obtient ainsi une ville de n personnes, qui est toujours de Casimir : les parties de cette nouvelle ville sont aussi des parties de la ville initiale, donc vérifient la propriété voulue.

L'hypothèse de récurrence montre alors qu'on peut diviser cette ville en deux parties non vides à l'intérieur desquelles tout le monde est ami. Mais dans la ville initiale, Casimir était ami avec tout le monde, sauf éventuellement avec l'arrière cousin de M.Dusnob. Il suffit donc de mettre Casimir dans la partie qui ne contient pas l'arrière cousin de M.Dusnob, si ce-dernier nous faisait l'honneur de sa présence. Sinon, Casimir peut aller dans n'importe quelle partie.

On a bien divisé la ville en deux parties non vides à l'intérieur desquelles tout le monde est ami, car on a juste rajouté Casimir qui, dans son groupe, est ami avec tout le monde. □

2. La méthode utilisée à ce moment de la démonstration est laissée à la libre appréciation du lecteur.

5 En guise d'ouverture : un problème ouvert

Pour les informaticiens : trouver le meilleur algorithme pour construire ces deux ensembles (on comptera les tests de connaissance).

Si on applique naïvement la technique proposée dans la résolution, on obtient facilement du $O(n^3)$. Mais je crois qu'on peut faire du $O(n^2)$, et je ne pense pas qu'on puisse faire mieux. Essayez de trouver un tel algorithme, c'est pas trop compliqué.